EQS DIFERENCIAIS PARCIAIS I- SETEMBRO de 2003–Lista 4

Professor: Ricardo Sá Earp

Fatores integrantes, teorema de Frobenius
Equações integráveis (exatas) da forma:

$$P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z = 0$$

1) Sejam $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ funções de classe C^1 definidas num aberto U de $\mathbb{R}^2$. Considere a equação

$$(*) \qquad P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

a) Mostre que $(*)$ admite um fator integrante, i.e $(*)$ é integrável.

b) Sejam μ e λ dois fatores integrantes de cujo quociente não se reduz a uma constante. Mostre que $F(x,y) = \dfrac{\lambda(x,y)}{\mu(x,y)} = c, c \in \mathbb{R}$, dá uma solução geral de $(*)$.

c) Estabeleça condições suficientes para que $(*)$ admita um fator integrante que dependa apenas de uma variável (ou bem x ou bem y). Idem para a existência de um fator integrante da forma $\mu = f(x+y)$.

i) Integre a equação

$$(5x^2 + 2xy + 3y^3) + 3(x^2 + xy^2 + 2y^3)y' = 0$$

ii) Encontre a solução geral da equação

$$(2x^2 + 2xy^2 + 1)y\,\mathrm{d}x + (3y^2 + x)\,\mathrm{d}y = 0$$

iii) Integre a equação

$$2(1+y^2)\,\mathrm{d}x + x(1+y^2)\,\mathrm{d}y = 0$$

iv) Admitindo que x é fator integrante da equação

$$(x+y)\,\mathrm{d}x+\alpha(x)\,\mathrm{d}y=0$$

encontre α satisfazendo $\alpha(1)=1$ de modo que a equação seja exata. Integre a equação.

d) Considere a equação

$$\left(y^2/2-2y\,\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x+(y-\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}y=0$$

i) Obtenha um fator integrante da equação.
ii) Obtenha a solução geral da equação
iii) Obtenha a expressão geral dos fatores integrantes da equação.

e) Estude como obter um fator integrante para a equação

$$(A(x,y)\,\mathrm{d}x+B(x,y)\,\mathrm{d}y)+(C(x,y)\,\mathrm{d}x+D(x,y)\,\mathrm{d}y)=0$$

i) Encontre um fator integrante para a equação

$$ay\,\mathrm{d}x+bx\,\mathrm{d}y+x^my^n(\alpha y\,\mathrm{d}x+\beta x\,\mathrm{d}y)=0$$

onde a,b,α,β,m,n são constantes.

f) Considere

$$(yx^2+y^3-xy)\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y=0$$

i) Mostre que fazendo uma escolha adequada de um fator integrante a equação obtida após uma mudança de variável é uma equação de Bernoulli.
ii) Integre a equação.
iii) Determine todos os fatores integrantes da equação.

g) Resolva a equação

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{x^2y^2+y^5}$$

2) Estabeleça a condição de integrabilidade da equação

$$(*)\qquad \mathrm{d}z=P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y$$

onde P e Q são funções de classe C^1 num aberto U de $\mathbb{R}^3$.

a) Integre a equação

$$p = \frac{2x + z^2 - x^2 - 2y^2}{2z}, \qquad q = \frac{4y + z^2 - x^2 - 2y^2}{2z}$$

O método de Mayer consiste em integrar $(*)$ no plano vertical $y - y_0 = m(x - x_0)$, onde $m \in \mathbb{R}$ e $\mathrm{d}y = m\,\mathrm{d}x$. Aplique o método para integrar

b)

$$\mathrm{d}z = \frac{\left(x^2 + 2x(y+z) - y^2 - z^2\right)\mathrm{d}x + \left(y^2 + 2y(x+z) - x^2 - z^2\right)\mathrm{d}y}{x^2 + y^2 - 2z(x+y) - z^2}$$

3) A finalidade deste exercício é integrar a E.D.P. quasilinear

$$(*) \qquad M(x,y,u)u_x = N(x,y,u)u_y$$

onde M e N são funções de classe C^1 num aberto U de $\mathbb{R}^3$.

a) Tome u como parâmetro e estabeleça a condição de integrabilidade da equação

$$(**) \qquad M\,\mathrm{d}y + N\,\mathrm{d}x = 0$$

b) Assuma que $\psi(x,y,u) = 0$ é solução de $(**)$ satisfazendo $\psi_u \neq 0$. Encontre uma fórmula para ψ e mostre que a função $u(x,y)$ determinada implicitamente satisfaz a equação $(*)$.

i) Seja

$$yu_x = xuu_y$$

Determine $\psi(x,y,u) = 0$, e encontre soluções particulares da equação.

4) Verifique se as 1-formas diferenciais abaixo ω são exatas ou integráveis encontrando as superfícies integrais.

a)

$$\omega = yz\,\mathrm{d}x + 2xz\,\mathrm{d}y - 3xy\,\mathrm{d}z = 0$$

b)

$$\omega = (6x + yz)\,\mathrm{d}x + (xz - 2y)\,\mathrm{d}y + (xy + 2z)\,\mathrm{d}z = 0$$

c)
$$\omega = (2x + y^2 + 2xz)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z = 0$$

d)
$$\omega = 2xz\,\mathrm{d}x - 2yz\,\mathrm{d}y - (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}z = 0$$

e)
$$\omega = y(x^2 - y^2 - xy)\,\mathrm{d}x + x(y^2 - x^2 - xz)\,\mathrm{d}y + xy(x + y)\,\mathrm{d}z = 0$$

Determine um fator integrante.

f)
$$(yz + z^2)\,\mathrm{d}x - xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z = 0$$

g)
$$2x\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + (1 + 2z^2 + 2yz + 2x^2 z)\,\mathrm{d}z = 0$$

h) Diferenciando verifique suas respostas aos itens $a) - g)$.

i) Considere

$$(*) \qquad y(y^2 - x)\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0$$

i_1) Mostre que a equação $(*)$ é invariante pela transformação (uma família a 1-parâmetro)
$$\begin{cases} y' = \mathrm{e}^{\epsilon/2}\, y \\ x' = \mathrm{e}^{\epsilon}\, x \end{cases}$$

i_2) Considere o operador infinitesimal do grupo dado por $\{\eta = \dfrac{y}{2}, \quad \xi = x\}$. Mostre que a equação $(*)$ admite um fator integrante da forma $\lambda(x, y) = \dfrac{1}{N\eta - M\xi}$, onde $M = y(y^2 - x)$ e $N = x^2$. Integre.

j) Mostre que se a equação
$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$$
é homogênea e $Mx + Ny \neq 0$, então um fator integrante está dado por $\lambda(x, y) = \dfrac{1}{Mx + Ny}$. Aplique isto encontrando primeiro um fator integrante da equação seguinte antes de resolvê-la
$$(xy - 2y^2)\,\mathrm{d}x - (x^2 - 3xy)\,\mathrm{d}y = 0$$

k) Mostre que $f(x+iy) := M + iN$ é holomorfa então um fator integrante de

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

pode ser obtido da forma $\lambda = \dfrac{1}{M^2+N^2}$. Usando isto integre

$$(y^2+2xy-x^2)\,\mathrm{d}y - (y^2-2xy-x^2)\,\mathrm{d}x = 0$$

5) Determine $f(x,y)$ de modo que a 1-forma diferencial abaixo ω

$$\omega = (yz-y^3)\,\mathrm{d}x + (xy^2+xz)\,\mathrm{d}y + f(x,y)\,\mathrm{d}z = 0$$

seja integrável, encontrando as superfícies integrais.

6)

a) Determine o campo de planos de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ dado pelas 1-formas diferenciais abaixo

i)

$$\omega = x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z = 0$$

ii)

$$\omega = x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y - z\,\mathrm{d}z = 0$$

b) Determine se as 1-formas do item $a)$ são integráveis e obtenha as superfícies integrais. Use o MAPLE para exibir um gráfico que desenhe as folheações determinadas .

c) Faça um estudo análogo ao que foi feiro nos itens $a)b)$ com respeito a 1-forma diferencial em $\mathbb{R}^3 \setminus$ *eixo* z dada por

$$\omega = y\,\mathrm{d}x - 2x\,\mathrm{d}y$$

d) Determine as singularidades das folheações em $\mathbb{R}^3$ dadas nos itens a, b, c.

e) Exiba outros exemplos interessantes de foleações de $\mathbb{R}^3$, exibindo os gráficos via o MAPLE.

f) Generalize o que foi feito anteriormente e obtenha folheações de codimensão 1 em R^n.

* * *

Vamos olhar para certos aspectos do teorema de Frobenius. Consulte as referências $2, 4, 6, 7, 11$ e 13 para obter um maior aprofundamento deste importante resultado.

Seja $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ campos de classe C^1 definidos num aberto U de $\mathbb{R}^n$. O colchete de Lie de X e Y está definido por

$$[X,Y] := \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Dizemos que uma distribuição $\mathcal{P}$ de k-planos de classe C^1 em $\mathbb{R}^n$ é integrável se existe uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão k tangente a $\mathcal{P}$. Um fato é que uma distribuição de k planos pode ser definida localmente como sendo o núcleo de $n-k$ formas independentes, ou seja dada pelas equações $\omega_{k+1} = 0, \ldots, \omega_n = 0$, onde $\omega_{k+1}, \ldots, \omega_n$, são 1-formas de classe C^1 linearmente independentes.

Sabemos que $\mathcal{P}$ é integrável se e somente se

$$\mathrm{d}\omega_j \wedge \omega_{k+1} \wedge \cdots \wedge \omega_n = 0, \qquad j = k = 1, \ldots, n$$

Dizemos que $\mathcal{P}$ é involutivo se dados campos X e Y tangentes a $\mathcal{P}$ então o colchete $[X,Y]$ também é tangente a $\mathcal{P}$.

A versão geométrica do teorema de Frobenius diz que $\mathcal{P}$ é integrável se e somente se é involutivo.

Uma outra maneira de ver o Teorema de Frobenius é via a equivalência: $\mathcal{P}$ é integrável, se e somente se o ideal $\mathcal{I}$ da formas diferenciais que anulam a distribuição $\mathcal{P}$ é fechado com respeito a diferenciação exterior, i.e $d(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$. Diz-se que neste caso $\mathcal{I}$ é um ideal diferencial.

7) Conservando as definições, convenções e notações acima:
   a) Seja Ω uma 2-forma diferencial num aberto U tal que

$$\Omega \wedge \omega_{k+1} \wedge \cdots \wedge \omega_n = 0$$

Mostre que localmente existem 1-formas diferenciais $\alpha_{k+1}, \ldots \alpha_n$ tal que

$$\Omega = \alpha_{k+1} \wedge \omega_{k+1} + \cdots + \alpha_n \wedge \omega_n$$

b) Mostre que

$$\mathrm{d}\omega_j(X,Y) = Y\omega_j(X) - X\omega_j(Y) + \omega_j\left([X,Y]\right)$$

c) Assuma que $\mathcal{P}$ é integrável. Mostre que $\mathcal{P}$ é involutivo e vice-versa.

8) Sejam $A(x,y,x,u), B(x,y,z,u)$ e $C(x,y,z,u)$ funções de classe C^1 definidas num aberto de $\mathbb{R}^4$. Estabeleça a condição de integrabilidade da equação

$$\mathrm{d}u = A(x,y,x,u)\,\mathrm{d}x + B(x,y,x,u)\,\mathrm{d}y + C(x,y,z,u)\,\mathrm{d}z$$

9) Sejam $A(x,y,z), B(x,y,z)$ e $C(x,y,z)$ funções de classe C^1 definidas num aberto de $\mathbb{R}^3$. Determine a condição de integrabilidade do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} = A \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} = B \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = C \end{cases}$$

10) Considere $U_k(u,v,x_1,\ldots,x_n)$ e $V_k(u,v,x_1,\ldots,x_n)$ duas funções suaves localmente. Estabeleça a condição de integrabilidade do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_k}{\partial u} = U_k(u,v,x_1,\ldots,x_n) \\ \dfrac{\partial x_k}{\partial v} = V_k(u,v,x_1,\ldots,x_n), \qquad k = 1,2,\ldots n \end{cases}$$

Nota: O resultado acima pode ser utilizado para demonstrar o teorema fundamental da Geometria Diferencial: As equações de compatibilidade Gauss e Codazzi-Mainardi são as equações de integrabilidade para se construir imersões isométricas em $\mathbb{R}^3$, mas geralmente nos espaços de formas espaciais. Consulte as referências 6, 10.

BIBLIOGRAFIA

1. T. Amaranath. *Partial differential equations.* Segunda edição. Alpha Science, England, 2003.

2. César Camacho & Alcides Lins Neto. *Teoria geométrica das folheações.* Projeto Euclides, 1979.
3. Manfredo P. do Carmo. *Differential forms and applications.* Springer, 1994.
4. Henri Cartan. *Cours de calcul différentiel.* Hermann, Paris,1967.
5. Lawrence C. Evans. *Partial differential equations.* AMS, 1998
6. Noel J. Hicks. *Notes in differential geometry.* Van Nostrand, 1965
7. Serge Lang. *Differential manifolds.* Springer, 1971.
8. A. Martin. *Equations aux dérivées partielles.* Dunod, Paris, 1991.
9. Jorge Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias.* Projeto Euclides, 1979.
10. J. J. Stoker. *Differential Geometry.* Wiley- interscience, 1969.
11. Philippe Tondeur. *Foliations on Riemannian Manifolds* Springer, 1988.
12. Georges Valiron. *Équations fonctionnelles.* J. Gabay, 1989.
13. Frank W. Warner. *Foundations of differential manifolds and Lie Groups.* Springer, 1983.
14. Daniel Zwillinger. *Handbook of differential equations.* Segunda edição, Academis Press, 1992.