EQS DIFERENCIAIS PARCIAIS I- SETEMBRO de 2003–Lista 5

Professor: Ricardo Sá Earp

E.D.P. não linear de primeira ordem
Método da faixa característica- Charpit Lagrange
O problema de Cauchy: Eliminação dos parâmetros e envelopes
Método de Jacobi

1) Considere as E.D.P's

$$f_1(x,y,z,p,q) = p^2 + q^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

$$g_1(x,y,z,p,q) = (p^2 + q^2)x - pz = 0 \tag{2}$$

* * *

$$f_2 = xp - yq = 0 \tag{3}$$

$$g_2 = z(xp + yq) - 2xy = 0 \tag{4}$$

a) Mostre que (1) e (2) são compatíveis e exiba uma família comum a um parâmetro. Elabore desenhos, usando o MAPLE, para diversos valores do parâmetro.

b) Mostre que $z = (x+y)/\sqrt{2}$ é uma solução de (1) mas não é uma solução de (2). Verifique sua resposta fazendo diferenciação.

c) Mostre que (3) e (4) são compatíveis e exiba uma família comum a um parâmetro.

2) Encontre uma integral completa para cada uma das equações abaixo, elaborando desenhos usando o MAPLE. Verifique sua resposta fazendo diferenciação.

a)
$$(p^2 + q^2)y - qz = 0$$

b)
$$xpq + yq^2 - 1 = 0$$

c)
$$x^2p^2 + y^2q^2 - 4 = 0$$

d)
$$z = px + qy + \log pq$$

e)
$$p^2x + q^2y = z$$

f)
$$pxy + pq + qy = yz$$

g)
$$zpq = p^2(p^2 + xq) + q^2(q^2 + yp)$$

h)
$$z(p^2 + q^2) + px + qy = 0$$

i)
$$z^2(p^2z^2 + q^2) = 1$$

j)
$$p^2x - qy^2 = 0$$

k)
$$px^3 + q^2 + xy = 0$$

l)
$$z^2(p^2 + q^2) = a^2$$

m)
$$z^2 - pqxy = 0$$

n) Procure encontrar em cada um dos exemplos anteriores uma nova integral completa, envelopes a dois parâmetros (integral singular), se existirem, envelopes de subfamílias a um parâmetro (integral geral), se existirem.

2) Discuta as equações características associadas à E.D.P. de Hamilton-Jacobi, as equações de Euler-Lagrange obtidas pela minimização do funcional *ação*, e as E.D.O. de Hamilton. Exiba exemplos de Hamiltonianos e Lagrangianos que aparecem na Mecânica Cássica.

3) Use o método das características para encontrar a superfície integral que seja solução da E.D.P. não linear
$$pq - z = 0$$
passando pela parábola $z = y^2$, $x = 0$. Verifique sua resposta fazendo diferenciação.

4) Use o método de Jacobi para resolver as E.D.P's não lineares em três variáveis independentes abaixo, encontrando uma integral completa
   a)
$$2xzu_x + 3z^2u_y + u_y^2u_z = 0$$
   b)
$$z + 2u_z = (u_x + u_y)^2$$
   c)
$$u_x^2 + u_y^2 + u_z = 1$$
   Verifique sua resposta fazendo diferenciação.

5) Discuta como o método de Jacobi pode ser aplicado para encontrar uma integral completa para uma E.D.P. de primeira ordem em duas variáveis independentes. Encontre pelo método de Jacobi uma integral completa da equação $p^2x + q^2y = z$.

6) Encontre uma solução para as E.D.P's abaixo, satisfazendo a condição inicial dada. Discuta a questão da unicidade. No caso não-linear, explicite a subfamília destacando o envelope. Determine os pontos não característicos de cada condição inicial ou de fronteira dados. Relacione seu cálculo com o teorema de existência e unicidade. Verifique sua resposta fazendo diferenciação.
   a)
$$p^2 + q = y$$
   contendo a reta $y = z = 0$.
   b)
$$pq = p + q$$
   passando pela reta $x + y = 0, \quad z = 1$.
   c)
$$p^2 + q^2 = 1$$

contendo o círculo no plano xy de centro $(1,0)$ e raio 1.

d)

$$(2xy-1)p+(z-2x^2)q=2(x-yz)$$

passando pela reta $x=1, \quad y=0.$

e)

$$x^3p+y(3x^2+y)q=z(2x^2+y)$$

contendo a parábola $z=y+y^2, \quad x=1.$

f)

$$(p^2+q^2)x=pz$$

passando pela parábola $y=z^2/4 \quad x=0.$

g)

$$p^2x+qy=z$$

contendo a reta $x+z=0, \quad y=1.$

h)

$$pq=z$$

passando pela parábola $z=y^2, \quad x=0.$

i)

$$z=p^2-q^2$$

contendo a parábola $z=-x^2/4, \quad y=0.$

j)

$$(x-y)p+(y-x-z)q=z$$

passando pelo círculo $x^2+y^2=1, \quad z=1.$

7) Encontre uma integral completa para a equação que não depende das variáveis independentes x,y,z

$$u_x+u_y+u_z=3u_xu_yu_z$$

8) Resolva os problemas de Cauchy abaixo, discutindo existência e unicidade, em cada caso.

a)

$$zp+q=1$$

contendo a curva inicial $x_0=s, y_0=s, z_0=s/2, \quad 0\leqslant s\leqslant 1.$

b)

$$2p + yq = z$$

contendo a curva inicial $x_0 = s, y_0 = s^2, z_0 = s, \quad 1 \leqslant s \leqslant 2$.

c)

$$p - zq + z = 0, \qquad x, y > 0$$

contendo a curva inicial $x_0 = 0, y_0 = s, z_0 = -2s, \quad -\infty < s < \infty$.

d)

$$(x+2)p + 2yq = 2z$$

contendo a curva inicial $x_0 = -1, y_0 = s, z_0 = \sqrt{s}$.

e)

$$p + q = z^2$$

contendo a curva inicial $x_0 = s, y_0 = 0, z_0 = f(s)$.

9) Aplique o método da faixa característica para resolver as E.D.P's abaixo, discutindo a escolha da faixa inicial e a unicidade.

a)

$$z = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) + (p - x)(q - y)$$

contendo o eixo x.

b)

$$p^2 x + qy = z$$

contendo a reta $y = 1, x + z = 0$.

b)

$$z = p^2 - q^2$$

passando pela curva $x_0 = s, y_0 = 0, z_0 = -s^2/4$.

c)

$$pq = 1$$

passando por $x_0 = 2s, y_0 = 2s, z_0 = 5s$.

d)

$$z = p^2 - 3q^2$$

contendo $x_0 = s, y_0 = 0, z_0 = s^2$.

10) Considere o seguinte problema inicial/bordo para a *equação do transporte estendida não-homogênea* (1 variável espacial)

$$\begin{cases} u_t + bu_x + cu = f(x,t), & \text{em } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = g, & \text{em } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

onde b, c são constantes e f, g são suficientemente regulares.

a) Classifique a E.D.P.
b) Escreva o sistema característico associado.
c) Interprete geometricamente a E.D.P. quando $c \equiv 0$ e $f \equiv 0$.
d) Aplicando o método das características, transforme a E.D.P. numa E.D.O. linear não homogênea na variável s.
e) Mostre que a solução do problema é dada por

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-ct} \int_0^t \mathrm{e}^{cs} f(x - b(t-s), s)\, \mathrm{d}s + \mathrm{e}^{-ct}\, g(x - bt)$$

BIBLIOGRAFIA

1. T. Amaranath. *Partial differential equations.* Segunda edição. Alpha Science, England, 2003.

2. Lawrence C. Evans. *Partial differential equations.* AMS, 1998

3. A. Martin. *Equations aux dérivées partielles.* Dunod, Paris, 1991.

4. Jorge Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias.* Projeto Euclides, 1979.

5. Georges Valiron. *Équations fonctionnelles.* J. Gabay, 1989.

6. Daniel Zwillinger. *Handbook of differential equations.* Segunda edição, Academic Press, 1992.