EQS DIFERENCIAIS PARCIAIS I- OUTUBRO de 2003–Lista 6

Professor: Ricardo Sá Earp

Primeiras noções de Cálculo das variações versus E.D.P.
Primeiras noções de E.D.P. de segunda ordem
Miscelânea de métodos de equações diferenciais, I

1) (***Convexidade***) Seja E um espaço vetorial. Dizemos que $\varphi : E \to (-\infty, \infty]$, é chamada *convexa*, se

$$(*) \qquad \varphi(tx + (1-t)y) \leqslant t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y), \qquad \forall x, y \in E,\ \forall t \in (0,1)$$

A definição se estende para φ definida num conjunto convexo U de E.

a) Mostre que se φ é convexa o conjunto $\{(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R}, \quad \varphi(x) \leqslant \lambda\}$ é convexo em $E \times \mathbb{R}$ e reciprocamente.

b) Mostre que se φ é convexa, então para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in E,\ \varphi(x) \leqslant \lambda\}$ é convexo em E, mas a reciproca não é verdadeira.

c) Mostre que a soma de duas funções convexas é convexa.

d) Mostre que se $\{\varphi_i\}_{i \in I}$, é uma família de funções convexas, o *envelope superior* $\varphi(x)$, definido por

$$\varphi(x) := \sup_{i \in I} \varphi_i(x)$$

é convexo.

e) Neste item consideraremos funções convexas de uma variável real definidas num intervalo aberto I da reta.

i) Interprete geometricamente a noção de *convexidade* para uma função de uma variável real φ. Em particular mostre que se $(a, b) \subset I$, e $a < s < t < u < b$, então

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leqslant \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t}$$

Mostre que neste caso convexidade implica continuidade.

ii) Mostre que $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ é convexa se e somente se para $a < x < u < y < b$,

$$\begin{vmatrix} \varphi(u) & u & 1 \\ \varphi(x) & x & 1 \\ \varphi(y) & y & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$$

iii) Mostre que uma função diferenciável de uma variável real φ é *convexa* $\iff$ a derivada φ' é monótona crecente. Daí conclua que se φ é duas vezes diferenciável, então $\varphi'' \geqslant 0$.

iv) Mostre a *desigualdade de Jensen*: Seja μ uma medida positiva numa σ-ágebra $\mathcal{M}$ definida num conjunto Ω tal que $\mu(\Omega) = 1$. Mostre que se f é uma função real em $L^1(\mu)$, se $a < f(x) < b$ para todo $x \in \Omega$; e se φ é convexa em (a,b), então

$$\varphi\left(\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu\right) \leqslant \int_\Omega (\varphi \circ f)\,\mathrm{d}\mu$$

Como aplicação mostre a desigualdade da média aritmético-geométrica, mais geralmente, mostre que

$$y_1^{\alpha_1} \cdot y_2^{\alpha_2} \cdots y_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n$$

onde $y_1, \dots y_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n$ são números reais positivos. Exiba outras aplicações desta desigualdade, tais como as desigualdades de Hölder e Minkowski para os espaços L^p.

f) Vamos trabalhar agora com funções convexas *contínuas* φ de n variáveis reais definidas num conjunto convexo de $U \subset \mathbb{R}^n$.

i) Mostre que se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e convexa, então

$$f(y) \geqslant f(x) + Df(x)(y - x), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

ii) Dados x, y, u, v, tais que $(x + ut, y + vt) \in U$, considere $\Phi(x,y)$ uma função definida num conjunto convexo $U \subset \mathbb{R}^2$. Seja

$$\Xi(t) := \Phi(x + ut, y + vt)$$

Mostre que Φ é convexa e contínua em U se e somente se $\Xi(t)$ é convexa, exibindo uma interpretação geométrica disto.

iii) Mostre que $\Phi(x, y)$ duas vezes diferenciável num conjunto convexo $U \subset \mathbb{R}^2$ é convexa, se e somente se a forma quadrática

$$\Phi_{xx}u^2 + 2\Phi_{xy}uv + \Phi_{yy}v^2$$

é positiva definida em U. Generalize para n variáveis.

iv) Mostre que se $L(p_1, \dots p_n)$ uma função duas vezes diferenciável definida num conjunto convexo $U \subset \mathbb{R}^n$ satisfaz

$$(**) \qquad \sum_{i,j} L_{p_i\, p_j}(p)\xi_i\, \xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2, \quad \lambda \geqslant c > 0$$

$\forall p \in U$, onde $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, então L é *estritamente convexa* em U (ou seja, em $(*)$ vale a desigualdade estrita, a não ser que $x = y$). Lembramos a notação: $L_{p_i\, p_j} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial p_i \partial p_j} = D_{p_i\, p_j} L$.

v) Dada $F(x, z, p)$ uma função de classe C^1 em $\overline{U} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $u_k(x)$ $Du_k(x)$ seqüências tais que $u_k(x) \to u(x)$ e $Du_k(x) \to Du(x)$, $\forall x \in U$ então, se F é convexa nas variáveis p, vale que

$$F(x, u_k, Du_k) \geqslant F(x, u_k, Du) + D_pF(x, u_k, Du)(Du_k - Du)$$

lembrando que $D_pF = (D_{p_1}F, \dots D_{p_n}F)$.

Nota: O exercício singelo acima é uma das ferramentas para demonstrar que se o Lagrangiano F está limitado inferiormente e a aplicação $p \mapsto F(x, z, p)$ é convexa (nas variáveis p), $\forall z \in \mathbb{R}, x \in U$ então o funcional $I[u]$ é semi-contínuo inferiormente (tal conceito está explorado no item 2) abaixo). Tal resultado aparece no teorema central de existência de minimizers do *método direto do Cálculo das Variações* (veja o livro de Evans) que pode ser enunciado da seguinte maneira:

Assuma que o Lagrangiano F satisfaça a relação de coercividade

$$F(x, z, p) \geqslant \alpha|p|^q - \beta, \qquad \text{para constantes } \alpha > 0 \text{ e } \beta \geqslant 0$$

$\forall p \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, x \in U$.

Assuma ainda que F seja convexo nas variáveis p. Segue então que F é fracamente semi-contínuo num espaço de Sobolev conveniente W e que se o conjunto admissível $\mathcal{A} = \{w \in W; \quad w = \varphi \in \partial U\} \neq \emptyset$, *então existe ao menos uma única* $u \in \mathcal{A}$ *minimizante do funcional*

$$I[w] = \int_U F(x, w, Dw)\, \mathrm{d}x$$

Ou seja, $I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w]$.

Além disso, se $F = F(x, p)$ (não depende de z) e se F é estritamente convexo nas variáveis p (Euler-Lagrange é estritamente elíptica) então o mimimizer $u \in \mathcal{A}$ de $I[w]$ é único.

vi) Descreva a relação entre a desigualdade $(**)$ e o conceito de uma equação diferencial partial de segunda ordem ser estritamente elíptica. Exibindo exemplos de tais equações tanto quasilineares quanto totalmente não-lineares ("fully non- linear").

Para o que se segue consulte o livro de Evans, Jost-Jost, Jost ou de Bresis referidos na bibliografia.

vii) Descreva a relação entre $(**)$ e a existência e unicidade de *minimizers* ou de *minimizantes* de um funcional

$$I[u] = \int_U F(x, u, Du)\, \mathrm{d}x$$

onde u pertence a um *conjunto admissível fechado convexo* $\mathcal{A} = \{w \in W; \quad w = \varphi \in \partial U\}$, onde W é um espaço funcional de Sobolev conveniente, U é um conjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ e F é uma função de classe C^1 em $\overline{U} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

* * *

O procedimento chamado *método direto do Cálculo das Variações* consiste *grosso modo* no seguinte:

Seja $\{u_k\}$ uma seqüência minimizante, i.e

$$I[u_k] \longrightarrow m$$

onde $m := \inf_{w \in \mathcal{A} \subset W} I[w]$, sendo $\mathcal{A}$ um conjunto não vazio admissível convexo e fechado num espaço funcional de Sobolev de soluções W.

Queremos mostrar que o ínfimo é assumido!

Se $m = \infty$, não há o que fazer. Caso contrário uma certa *condição de coercividade* acarreta que a seqüência $\{u_k\}$ está limitada num espaço de Sobolev reflexivo W (devido a desigualdade de Poincaré). Sendo assim existirá uma subseqüência $\{u_{k_j}\}$ *fracamente convergente* em W, i. e existe $u \in \mathcal{A}$ $u_{k_j} \to u$ fracamente em W. Todavia $I[u]$ não é em geral contínuo na topologia fraca! Felizmente, como $I[u]$ é semi-contínuo inferiormente, temos que

$$I[u] \leqslant \liminf_{j \to \infty} I[u_{k_j}]$$

Deduzimos que

$$I[u] \leqslant m$$

Portanto

$$I[u] = m$$

Já que $m \leqslant I[u], \quad \forall u \in \mathcal{A}$, ou seja u é de fato um minimizer.

Nota: Vamos lembrar a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional $I[u]$ dada por

$$(E-L) \qquad \begin{aligned} -\sum_{i=1}^{\infty} \left(F_{p_i}(x,u,Du)\right)_{x_i} + F_z(x,u,Du) = 0 \qquad &\text{em} \quad U \\ u = g \qquad &\text{em} \quad \partial U \end{aligned}$$

A primeira equação acima se escreve

$$(E-L) \qquad Qu = \operatorname{div} D_pF(x,u,Du) - D_zF(x,u,Du) = 0 \qquad \text{em} \quad U$$

Uma solução suave (regular) de $(E-L)$ é também chamada de *solução forte* da equação de Euler-Lagrange.

Além disso, lembramos que u é *solução fraca* da equação de Euler-Lagrange $(E-L)$ se

$$(E-L)' \qquad \int_U \sum_{i-1}^{n} \left(F_{p_i}(x,u,Du)\, D_i\eta + F_z(x,u,Du)\eta\right) \mathrm{d}x = 0$$

$\forall\eta$ num espaço admissível W.

Note que todo ponto crítico do funcional $I[u]$ com Lagrangiano $F(x,z,p)$ bem comportado no espaço admissível W é uma solução fraca da equação $E-L$, i.e um ponto crítico u de $I[u]$, também chamado de ponto estacionário, é uma solução de $(E-L)'$. Além disso se u for regular (suave) u é solução forte da equação $(E-L)$. Logo $(E-L)$ é uma condição necessária para a existência de um minimizer suave. A estratégia geral para resolver o problema de minimização é resolver a equação $(E-L)$ associada e em seguida se desdobrar para mostrar que a solução é minimizante. Além disso a elipticidade da equação $(E-L)$ é equivalente à convexidade de $F(x,z,p)$ com respeito as variáveis p, que por sua vez está relacionada com *unicidade* e *regularidade* (veja Evans) de Giorgi e Nash (veja Jost-Jost). De fato, uma condição necessária para a existência de um minimizer suave do funcional $I[u]$ está dada pela condição de Legendre, i.e

$$D_{p_ip_j}F(x,u,Du)\xi_i\xi_j \geqslant 0, \qquad \forall\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$$

implicada pela convexidade nas variáveis p, e que é equivalente à elipticidade da equação de Euler-Lagrange. Claro que $(E-L)$ é estritamente elíptica, i.e

$$D_{p_ip_j}F(x,u,Du)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2, \qquad \lambda \geqslant c > 0, \quad \forall\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$$

se e somente se F é estritamente convexo nas variáveis p.

Além disso, se u é um ponto crítico do do funcional que é uma solução fraca da equação de Euler-lagrange, fazendo $\iota(t) := I[u+t\eta]$, onde η é uma função teste de suporte compacto em U temos que

$$\iota(t) = \iota(0) + \frac{t^2}{2}\iota''(\xi), \qquad 0 < |\xi| < |t|$$

pela fórmula de Taylor, resto Lagrange (já que $\iota'(0) = 0$). Agora se L é convexo nas variáveis p e F não depende de z segue que u é um minimizer, (fazendo o cálculo e mostrando que $\iota''(\xi) \geqslant 0$).

De modo que a busca dos minimizers estão intimamente relacionados com a procura de soluções de certas equações elípticas. No caso de problemas de Dirichlet clássicos envolvendo o Laplaciano, os resultados clássicos de Stampacchia e Lax-Milgram em espaços de Hilbert mostram existência e unicidade do minimizer, que, combinados com regularidade produzem existência do problema de Dirichlet (veja Bresis, Evans ou Jost). Mais precisamente, levam a soluções do seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u(x)\right) + c(x)u(x) = f(x) \qquad \text{in } U \qquad\qquad (*) \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 \qquad \text{on } \partial U \end{cases}$$

onde $(*)$ é estritamente elíptica, os coeficientes $c(x), a_{ij}(x)$ são limitados, $c(x) \geqslant 0$.

2) Considere o funcional quadrático

$$I[u] := \int\limits_U \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i u(x) D_j u(x) + 2\sum_{j=1}^{n} b_j D_j u(x)\, u(x) + c(x)\,(u(x))^2 \right) \mathrm{d}x$$

onde $a_{ij} = a_{ji}$, com b_j, c limitadas e $a_{ij}, b_j \in C^1$.

a) Mostre, reproduzindo os cálculos com todos os detalhes, que a equação de Euler-Lagrange correspondente está dada por

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + b_j(x)u\right) - \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} - c(x)u = 0$$

b) Classifique a equação $(*)$. Determine as condições para que a equação seja elíptica.

c) Enuncie o problema de Dirichlet para a equação $(*)$ e pesquise nas referências dadas abaixo condições gerais suficientes para a existência deste. Também discuta a questão da unicidade. Enuncie claramente e rigorosamente os enunciados.

d) Dê vários exemplos clássicos de equações da forma $(*)$ discutindo brevemente o contexto que tais equações aparecem tanto na Matemática Pura quanto na Matemática Aplicada.

3) (***Semi-continuidade***) Seja X um espaço métrico. Seja $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Vamos ver primeiro a definição de funções semi-contínuas superiormente. Dizemos que φ é *semi-contínua superiormente* (denotamos *scs*), se para cada $a \in X$, temos que

$$\limsup_{x \to a} \varphi(x) \leqslant \varphi(a)$$

Ou seja, $\forall \epsilon > 0, \exists$ vizinhança U de a em X tal que $\varphi(x) \leqslant \varphi(a) + \epsilon, \quad \forall x \in U$, se $\varphi(a) > -\infty$. Se $\varphi(a) = -\infty$, a condição é que $\forall A > 0, \exists$ vizinhança U de a, tal que $\varphi(x) < -A, \quad \forall x \in U$.

Por outro lado, Dizemos que $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é *semi-contínua inferiormente* (denotamos *sci*), se para cada $a \in X$, temos que

$$\liminf_{x \to a} \varphi(x) \geqslant \varphi(a)$$

Ou seja, $\forall \epsilon > 0, \exists$ vizinhança U de a em X tal que $\varphi(x) \geqslant \varphi(a) - \epsilon, \quad \forall x \in U$, se $\varphi(a) < \infty$. Se $\varphi(a) = \infty$, a condição é que $\forall A > 0, \exists$ vizinhança U de a, tal que $\varphi(x) > A, \quad \forall x \in U$.

a) Mostre que se φ é *scs*, então φ é limitada em qualquer compacto $K \subset X$ e f assume o máximo em K.
b) Mostre que se φ é *scs*, então o conjunto $\{x; \quad \varphi(x) = M\}$ é fechado em X.
c) Mostre que se φ_1 e φ_2 são funções semi-contínuas superiormente, então, se $\lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \geqslant 0$, as funções $x \mapsto \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, $x \mapsto \max(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ e $\lambda\varphi_1(x)$ são *scs*.
c) Se $\{\varphi_n\}$ é uma seqüência de funções *scs* no espaço métrico X, assumindo que $\varphi_{n+1}(x) \leqslant \varphi_n(x)$, mostre que $\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x)$ é ainda *scs*.
d) (*caracterização das funções sci*) Mostre que $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, é *sci* se e somente se $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\{x; \quad \varphi(x) \leqslant \lambda\}$$

é fechado em X.

Conclua que se φ é *sci* e se $x_n \to x$ então

$$\varphi(x) \leqslant \liminf_{n \to \infty} \varphi(x_n)$$

e) Mostre que toda função *sci* definida num espaço métrico compacto X assume o mínimo em X.
f) Mostre que se φ é *scs*, então $-f$ é *sci.*
g) Mostre que φ é contínua, se e somente se φ é *scs* e *sci.*
h) Discuta a relação entre o conceito de semi-continuidade inferior e a existência de *minimizers* ou de *minimizantes* de um funcional

$$I(u) = \int_U F(x, u, Du)\, \mathrm{d}x$$

onde u pertence a um *conjunto admissível* $\mathcal{A} = \{w \in W; \quad w = \varphi \in \partial U\}$, onde W é um espaço funcional conveniente, U é um conjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ e F é uma função de classe C^1 em $\overline{U} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

4) A superfície gerada pelo gráfico de uma função de classe C^1 $y(x), \quad a \leqslant x \leqslant b$ em torno do eixo dos x tem área dada por

$$I[y] = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x$$

Assuma que existe uma superfície minimizante (que minimiza o funcional área $I[y]$). Mostre que esta é gerada por um a catenária, resolvendo a equação de Euler Lagrange $(E - L)$. Esboce desenhos de uma família a 1 parâmetro usando o MAPLE. Tal superfície é chamada de catenóide. Calcule a fórmula da segunda variação e mostre que o ponto crítico é de fato um minimizer.

5) Considere o funcional

$$I[y] = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\, \mathrm{d}x \tag{4}$$

sujeito a condição de fronteira $y_j(a) = a_j, y_j(b) = b_j, \quad j = 1, \ldots, n.$ onde $y = (y_1, \ldots y_n)$ e $F(x, y_1, \ldots y_n, p_1, \ldots y_n)$ é uma função de classe C^1 nos seus argumentos.

a) Deduza a equação de Euler-Lagrange (notação clássica)

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y_j'} + \frac{\partial F}{\partial y_j} = 0, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

b) Deduza a equação de Euler-Lagrange para condições não impostas, livres de fronteira ("free end points"), na direção y.

c) Escreva $p_i = \dfrac{\partial F}{\partial y_i'}$ e assuma que pode ser resolvida produzindo y_i' como função de x, y_j, p_j $(j = 1, \dots n)$ (na linguagem clássica as p_i são chamadas de variáveis canônicas ou conjugadas a y_i).

Defina uma nova função

$$H(x, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, y_n) := \sum_{i=1}^{n} p_i y_i' - F(x, y_1, \dots y_n, y_1', \dots y_n')$$

chamada de Hamiltoniano correspondente ao funcional (4).

i) Mostre que

$$(E) \qquad y_i' = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad -\frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{\partial H}{\partial y_i}$$

deduza as equações de Euler associadas ao funcional

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad -\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad i = 1, \dots n$$

ii) defina um novo funcional $J[y_1, \dots, y_n, p_1, \dots p_n]$ cujas equações de Euler Lagrange sejam exatamente (E).

iii) Considere a o funcional

$$I[y] = \int_a^b \left(\alpha y'^2 + \beta y^2\right) \mathrm{d}x$$

Deduza as equações de Euler-Lagrange, calcule o Hamiltoniano, calcule as equações canônicas de Euler.

6) Considere o funcional

$$I[y] = \int_0^1 (y')^2 \,\mathrm{d}x$$

a) Ache os pontos críticos de $I[y]$ satisfazendo a condição de fronteira $y(0) = 0$ e $y(1) = 1$.

b) Ache os pontos críticos de $I[y]$ com pontos finais livres $y(0)$ e $y(1)$, não pré-determinados.

7) Considere o funcional

$$I[u] = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, y, z, x', y', z')\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

onde F é de classe C^1 nos seus argumentos.

a) Escreva as equações de Euler Lagrange para o funcional .

b) Assuma que $\boldsymbol{F}$ é uma força conservativa atuando numa partícula de massa m se movendo no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$, i. e $\boldsymbol{F} = -\nabla V$, onde $V(x, y, z)$ é o potencial (de classe C^1). Seja T a energia cinética. Escreva as equações de Newton do movimento.

Assuma que o Lagrangiano F satisfaça $F = T - V$:

c) Mostre o princípio de Hamilton: Se a partícula se move de um ponto A até um ponto B no intervalo de tempo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, então o caminho percorrido é aquele que faz do funcional (6) estacionário.

d) Generalize para um número quaisquer de partículas e variáveis, considerando o funcional

$$I[q_1, \ldots, q_n] = \int_{t_1}^{t_2} F(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)\,\mathrm{d}t$$

e) Neste item vamos colocar o princípio de Hamilton na sua forma canônica.

Vamos definir os *momenta* generalizados por

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \qquad i = 1, \ldots n$$

Agora vamos definir o Hamiltoniano H por

$$H(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, \ldots p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - F$$

Considere o funcional

$$J[q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n] = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H \right) \mathrm{d}t$$

Mostre que os pontos estacionários do funcional implicam nas equações de Euler:

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad -\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots n$$

Tal sistema de $2n$ equações são chamados de equações de Hamilton na Mecânica e a condição de ponto estacionário $J'[.] = 0$, ou classicamente $\delta J = 0$ corresponde a forma canônica do princípio de Hamilton.

Conclua que as equações de Newton, as equações de Lagrange e de Hamilton são princípios variacionais que expressam de maneira equivalente as leis físicas do movimento na Mecânica clássica.

f) Vamos inferir as equações de Hamilton-Jacobi variacionalmente. Para isto precisamos calcular a fórmula geral da primeira variação permitindo que os pontos extremos do funcional

$$(F) \qquad I[y] = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

variem da seguinte maneira: Assuma que para cada de pontos extremos pré-determinados $A = (a, y(a) = y_a)$, e $(b, y(b) = y_b)$ existe um única curva crítica $\mathcal{C}$ ligando estes pontos. Fixemos o ponto inicial $y(a) = y_a$, e permitamos variar o ponto final $y(b)$. O funcional (F) fica sendo uma função $S = S(b, y_b)$, de duas variáveis.

Assuma ainda que podemos introduzir a variável canônica p como no item $4)c)$

$$p = \frac{\partial F}{\partial y'}$$

Levando em conta a hipótese que o espaço admissível tomado consiste de curvas críticas, isto é satisfazem a equação de Euler Lagrange

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

e escrevendo $u = S(x, y)$, mostre que

i)

$$\frac{\partial S}{\partial y} = p, \qquad \frac{\partial S}{\partial x} = -H$$

onde $p(x,y) = \dfrac{\partial F}{\partial y'}$ e $H = H(x,y,p) = py' - F$ é o Hamiltoniano.

Conclua a equação de Hamilton-Jacobi

$$(H-J) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + H\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

ii) Agora suponha que $S = S(x,y,\alpha)$ seja uma família a 1 parâmetro de soluções da equação $(H-J)$ que seja um ponto crítico de (F). Levando em conta as equações canônicas de Euler, i. e

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

mostre que

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \mathrm{cst}$$

em cada curva crítica. Isto sugere um método para se encontrar as curvas críticas.

iii) Utilizando as equs de Hamilton-Jacobi como mostrado no item *ii)* mostre que a equação de $(E-L)$ asociada ao funcional

$$I[y] = \int_a^b y'^2 \, \mathrm{d}x$$

é dada por

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 = 0$$

Classifique e resolva a equação mostrando que os pontos críticos do funcional são retas.

iv) Considere o seguinte exemplo proveniente da ótica geométrica

$$I[y] = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(x,y)\sqrt{1 + y'2} \, \mathrm{d}x$$

Mostre que a equação de $(H-L)$ chamada de *eikonal* é dada por

$$|\nabla u| = 1$$

onde $u = S(x,y)$.

v) Considere o Lagrangiano

$$F(x,y,y') = \frac{1}{2}\left(y'^2 + \alpha y^2\right), \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Calcule o Hamiltoniano e escreva a equação de Hamilton-Jacobi. Fazendo a mudança de variável $u = \psi(x)y^2$, mostre que $\psi(x)$ satisfaz uma equação de Riccati. Fazendo a mudança $u = -\lambda x + \Psi(y)$, mostre que

$$u = S(x,y) = -\lambda x + \int_0^y \sqrt{\alpha\zeta^2 + 2\lambda}\, \mathrm{d}\zeta$$

Fazendo $\dfrac{\partial S}{\partial \alpha} = \mu$, obtenha que para $\alpha < 0$

$$y = \sqrt{\frac{2\lambda}{-\alpha}} \sin\left(\sqrt{-\alpha}(x+\mu)\right)$$

Obtenha também a solução para $\alpha > 0$. Mostre que y é um *oscilador harmônico* que satisfaz as equações de Euler-Lagrange do funcional.

8) Considere o funcional

$$I[y] = \int_0^1 \left(y'^2 + y^2\right) \mathrm{d}x$$

sujeito a condição $y(0) = 0, y(1) = 1$.

a) Ache numa forma explícita o ponto crítico do funcional.

b) Seja u o ponto crítico encontrado no item a). Fazendo uma estimativa $I[u + t\eta] - I[u]$ mostre que o ponto estacionário é um minimizante.

9) Considere o funcional

$$I[y] = \int_0^1 \left(y'^2 + y'^3\right) \mathrm{d}x$$

sujeito a condição $y(0) = 0 = y(1)$. Restrinja o conjunto de funções admissíveis, se necessário, de maneira que o ponto estacionário seja minimizante.

10) Considere o funcional quadrático

$$I[y] = \frac{1}{2}\int_a^b \left(y'^2 v(x) + w(x)y^2 - 2r(x)y\right) \mathrm{d}x$$

com condições $y(a) = \alpha$ e $y(b) = \beta$, onde $v(x)$, $w(x)$ e $r(x)$ são funções com derivadas contínuas pré-determinadas.

a) Escreva as equações de Euler-Lagrange para o funcional, obtendo um equação de Sturm-Louville.

b) Seja u o ponto crítico satisfazendo as equações obtidas em a). Quando u, v são constantes e $v > 0$ estime

$$I[u + t\eta] - I[u] = v\eta^2(1/2)K(\eta)$$

onde

$$K(\eta) = \int_a^b \eta\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{w}{v}\right)\eta\,\mathrm{d}x$$

sendo $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Expanda η numa série seno de Fourier (veja o livro do prof. Djairo) , obtendo

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n, \qquad \varphi_n = \sin\left(\frac{n\pi(x-a)}{(b-a)}\right)$$

Usando ortogonalidade mostre que

$$K(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\left(\frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2} + \frac{w}{v}\right)\int_a^b \varphi_n^2\,\mathrm{d}x$$

Conclua que se

$$\frac{\pi^2}{(b-a)^2} + \frac{w}{v} \geqslant 0$$

tem-se que $K(\eta) \geqslant 0$, como desejado.

Como corolário obtenha a estimativa interessante

$$\int_a^b (u')^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{\pi^2}{(b-a)^2}\int_a^b u^2\,\mathrm{d}x, \qquad \forall u, \quad u(a) = u(b) = 0$$

Está embutido neste resultado o princípio de Rayleigh para estimar o primeiro autovalor de um operador elíptico de segunda ordem.

11) Considere o problema de minimizar ou maximizar um funcional

$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x, \qquad y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

sujeito ao vínculo

$$K[y] = \int_a^b G(x, y, y')\,\mathrm{d}x = \mathrm{cst}$$

Mostre usando o método dos multiplicadores de Lagrange que se y não é um ponto crítico de $K[y]$, então vale a regra de Euler

$$\frac{\partial}{\partial y}(F + \lambda G) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial}{\partial y'}(F + \lambda G) = 0$$

a) Aplique o método de Euler para resolver o problema isoperimétrico de encontrar a função $y(x)$ que maximiza a área debaixo da curva (gráfico de y)

$$I[y] = \int\limits_0^a y\,\mathrm{d}x, \qquad y(0) = y(a) = 0$$

sujeito ao vínculo de manter o comprimento da curva

$$K[y] = \int\limits_0^a \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{cst}$$

fixado.

b) Um problema de autovalores consiste em minimizar

$$I[y] = \int\limits_0^1 (y')^2\,\mathrm{d}x, \qquad y(0) = y(1) = 0$$

sujeito à

$$K[y] = \int\limits_0^1 y^2\,\mathrm{d}x = 1$$

i) Encontre a relação de Euler e mostre que o mínimo é atingido para $y = \sqrt{2}\sin \pi x$, e o menor autovalor é $\lambda_1 = I[y] = \pi^2$. Compare com o resultado obtido no final do item 9).

12) Dada $g(x, y), x \in [a, b], y \in \mathbb{R}$, uma função de classe C^1 estritamente positiva, determine as equações de Euler-Lagrange para o funcional

$$I[y] = \int_a^b \frac{(1 + y'^2)^{1/2}}{g(x, y)}\,\mathrm{d}x$$

Para $g(x, y) = 1/y, y > 0$, calcule os pontos críticos de $I[y]$. Generalise considerando

$$I[x_1, \ldots x_n, u] = \int_a^b \frac{(\sum_{i=1}^n x_i'^2 + u')^{1/2}}{g(x_1, \ldots, x_n, u)}\,\mathrm{d}x$$

onde $g(x_1, \ldots, x_n, u) = \dfrac{1}{u} > 0$.

13) Dada uma variedade Riemanniana suave M com métrica $<,>$ e $\gamma : [0, T] \to M$, uma curva parametrizada regular , considere o *funcional energia* (veja o livro do prof. Manfredo, por exemplo)

$$E(\gamma) = \int_0^T < \gamma', \gamma' > \mathrm{d}t$$

a) Encontre num sistema de coordenadas locais as equações de Euler - Lagrange para $E[.]$ e obtenha as equações das geodésicas parametrizadas por um parâmetro proporcional ao comprimento de arco. Demonstre um resultado de existência e unicidade de geodésicas. Calcule as geodésicas das esferas $\mathbb{S}^n$.

b) Encontre as geodésicas do plano hiperbólico $\mathbb{H}^2 := \{z = x + iy \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$, munido da métrica hiperbólica $\mathrm{d}s = \dfrac{1}{\operatorname{Im} z}|\,\mathrm{d}z|$.

14) Obtenha a equação da hipersuperfície mínima em $\mathbb{R}^{n+1}$ como solução de um problema variacional.

15) Seja $X(u, v)$ uma superfície regular conformemente imersa em em $\mathbb{R}^3$, com métrica $\mathrm{d}s^2 = \lambda^2(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)$, onde $\lambda^2 = \mathrm{e}^{2\omega}$, com coeficientes da segunda

forma fundamental l, n, m; ou seja com função de Hopf $\varphi = \dfrac{l-n}{2} - im$ (veja no livro de Hopf, por exemplo). De maneira que $w = u + iv$ são parâmetros isotérmicos sobre a superfície. Sejam K (produto $k_1 k_2$ das curvaturas principais) e H (semi-soma $(k_1 + k_2)/2$ das curvaturas principais) a curvatura de Gauss e a curvatura média, respectivamente.

a) Deduza as equações de compatibilidade de curvatura de Gauss (G) e equações de Codazzi-Mainardi $(C - M)$ em coordenadas isotérmicas,

$$K = \underbrace{\frac{-\triangle \log \lambda}{\lambda^2}}_{\text{definição intrínseca da curvatura de Gauss}} = \underbrace{\frac{ln - m^2}{\lambda^4}}_{\text{determinante da segunda forma fundamental}} \qquad (G)$$

$$\varphi_{\overline{w}} = \lambda^2 \left(\frac{l+n}{2\lambda^2} \right)_w = \lambda^2 H_w \qquad (C - M)$$

i) Mostre que a *equação de curvatura de Gauss* é dada por

$$\triangle \omega = \omega_{uu} + \omega_{vv} = |\varphi|^2 \,\mathrm{e}^{-2\omega} - H^2 \,\mathrm{e}^{2\omega}$$

Além disso mostre que quando $H = \mathrm{cst}$ a equação de Codazzi-Mainardi é equivalente a que $\varphi(w)$ é holomorfa $(w = u+iv)$. Deduza daí que numa superfície de curvatura média constante que não seja um plano ou uma esfera os pontos umbílicos são isolados. Conclua disto não-existência de pontos umbílicos numa superfície de revolução de curvatura média constante.

b) Assuma que $\varphi = C\,\mathrm{e}^{-i\beta} = \mathrm{cst}$ dando uma interpretação geométrica disto. Mostre que quando $H = 1/2$ e $\varphi = -H\,\mathrm{e}^{-i\beta}$ a equação de curvatura de Gauss fica

$$\triangle \omega + \sinh \omega \cosh \omega = 0$$

i) Mostre que as curvaturas principais k_1 e k_2 são dadas por

$$k_1 = \mathrm{e}^{-\omega} \sinh \omega, \qquad k_2 = \mathrm{e}^{-\omega} \cosh \omega$$

ii) Mostre que

$$|\varphi|^2 = 4\lambda^4 (1 - 4K)$$

Concluindo que $-\infty < K < 1/4$.

iii) Mostre que os coeficientes da segunda forma fundamental estão dados por

$$\begin{aligned} l &= \mathrm{e}^{\omega}\left(\sinh\omega\cos^2\beta/2 + \cosh\omega\sin^2\beta/2\right) \\ m &= -\sin\beta/2\cos\beta/2 \\ n &= \mathrm{e}^{\omega}\left(\cosh\omega\cos^2\beta/2 + \sinh\omega\sin^2\beta/2\right) \end{aligned}$$

iv) Fazendo $\omega(u,v) = f(u)$ encontre soluções da equação do início do item b).

v) Classifique as superfícies de revolução de curvatura de Gauss constante $K = +1$ em $\mathbb{R}^3$, fazendo um desenho com o uso do MAPLE.

vi) Mostre que $\vartheta := 2\omega$ satisfaz a equação de *sinh-Gordon*

$$-\triangle\vartheta = \sinh\vartheta$$

Nota : Considere $\mathcal{M}$ o conjunto de métricas Riemannianas completas g em $\mathbb{R}^2$, tais que

(1) cujas curvaturas de Gauss K satisfazem $-\infty < c_1 \leqslant K \leqslant c_2 < 1/4$, onde c_1, c_2 são constantes.

(2) admitindo uma imersão isométrica $X : (\mathbb{R}^2, g) \to \mathbb{R}^3$, com curvatura média $H = 1/2$.

Segue então que existe uma correspondência biunívoca entre as métricas em $\mathcal{M}$ e as soluções limitadas da equação de sinh-Gordon

$$-\triangle\vartheta = \sinh\vartheta$$

dada precisamente por

$$g \mapsto \vartheta = 2\omega$$

As técnicas são uma combinação bonita de Geometria Diferencial e de Geometria Conforme (para mostrar que o tipo conforme de é $\mathbb{C}$) e E.D.P. (teorema fundamental da Geometria Diferencial). Veja no livro de Eells e Ratto.

16) Vamos tratar superfícies $M \subset \mathbb{R}^3$ de curvatura de Gauss $K = -1$ Pode ser mostrado que existem coordenadas locais x, y tais que a métrica e a segunda forma fundamental são dadas por (veja o livro de Dubrovin, Fomenko e Novikov)

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j = \mathrm{d}x^2 + 2g_{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}y^2, \qquad b_{ij}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j = 2b_{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(usando a convenção de omitir o somatório)

a) Seja $g_{xy} := \cos\omega$. Dê uma interpretação geométrica disto.

Fazendo uso das equações de curvatura de Gauss, em termos do símbolos de Christoffel (da métrica), dos coeficientes da segunda fórmula fundamental (veja refs. abaixo) mostre que

$$(S-G) \qquad \omega_{xy} = \sin\omega$$

chamada de equação de *sine- Gordon.*

i) Faça a mudança de variáveis $x = (\tau + \xi)/\sqrt{2}, y = (\tau - \xi)/\sqrt{2}$ e tranforme a equação $(S-G)$ em

$$(S-G)' \qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2} = \sin\omega$$

ii) Mostre que as soluções de $(S-G)'$ que são independentes de ξ e que decrescem quando $\tau \to \infty$, correspondem à superfícies de revolução de curvatura de Gaus $K = -1$ dadas por

$$z = -\sqrt{1-x^2-y^2} + \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

chamadas de *pseudo-esferas.* Elabore um desenho fazendo uso do MAPLE.

iii) Considere as auto-transformações de Bäcklund relativas à $(S-G)$, dadas por

$$(B) \qquad \begin{aligned} \nu_x &= \omega_x + 2\lambda\sin\left(\frac{\nu+\omega}{2}\right) \\ \nu_y &= -\,\omega_y + \frac{2}{\lambda}\sin\left(\frac{\nu-\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

Mostre que dada $\omega(x, y)$ satisfazendo $(S - G)$, se $\nu(x, y)$ satisfaz (B), então $\nu(x, y)$ também satisfaz $(S - G)$. Fazendo $\omega = 0$ em $(S - G)$ mostre que a outra solução ν está dada por

$$\tan \frac{\nu}{4} = C\, \mathrm{e}^{(\lambda y + x/\lambda)}$$

Use esta solução para achar outra solução não trivial de $(S - G)$.

17) Considere a equação de Burger

$$(Br) \qquad u_t + u u_x = \sigma u_{xx}, \qquad \sigma \in \mathbb{R}$$

a) Mostre que se $w(x, t)$ satisfaz (Br) e se $\varphi(x, t)$ é uma solução da equação

$$\varphi_t + w\varphi_x = \sigma\varphi_{xx}$$

então a função $v(x, y)$ definida pela transformação de Bäcklund

$$v(x, t) = -2\sigma \frac{\varphi_x}{\varphi} + w$$

também é solução de (Br).

b) Tomando $w(x, t) = 0$ e levando em conta que $\varphi(x, t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2/4\sigma t}}{\sqrt{4\pi\sigma t}}$ é solução de $\varphi_t = \sigma\varphi_{xx}$, mostre que $v(x, t) = x/t$ é solução da equação de Burger.

18) Usando o método das características, resolva, desenvolvendo todos os detalhes, o problema com valor inicial da *equação de transporte não homogênea*

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du = f & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

onde $b \in \mathbb{R}^n$ e $f(x, t), g(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ são dadas. Em particular, encontre todas as soluções de classe C^1 da equação homogênea associada $(f \equiv 0)$.

19) Exiba uma solução completa da *equação de Hamilton-Jacobi*

$$(H - J) \qquad u_t + H(Du) = 0$$

explicitando um método geral que seja aplicado em particular à estrutura da equação $(H - J)$.

21) Elabore uma redação explicando com todos os detalhes as relações entre o *funcional ação*, as E.D.O. de *Hamilton*, a E.D.P. de *Hamilton- Jacobi*, e a fórmula de *Hopf- Lax*.

BIBLIOGRAFIA

1. A. M. Arthurs. *Calculus of variations.* Routledge & Kegan, 1975.
2. T. Amaranath. *Partial differential equations.* Segunda edição. Alpha Science, England, 2003.
3. Haïm Bresis. *Analyse fonctionnelle.* Masson, 1983.
4. Manfredo P. do Carmo. *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides, 1988.
5. Manfredo P. do Carmo. *Differential Geometry of curves and surfaces.* Prentice-Hall, 1976.
6. B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko & S. P. Novikov. *Modern geometry-methods and applications.* Springer, 1985.
7. James Eells & Andrea Ratto. *Harmonic maps and minimal immersions with singularities.* Annals of Math. studies, Princeton Univ. Press, 1993.
8. Lawrence C. Evans. *Partial differential equations.* AMS, 1998
9. I. M. Gelfand & S. V. Fomin. *Calculus of variations.* Translated from Russian by Richard A. Silverman. Prentice Hall, 1963.
10. Djairo Guedes de Figueiredo. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais.* Projeto Euclides, 1977.
11. G. H. Hardy, J. E. Littlewood & G. Pólya. *Inequalities.* Cambridge Univ. Press, 1951.
12. Heinz Hopf. *Differential geometry in the large.* Lecture notes, Springer, 1989.
13. Emmanuel Hebey. *Introduction à la analyse non linéaire sur les variétés.* Diderot Ed, 1997.
14. John Hubbard & Beverly West. *Équations différentielles et systèmes dynamiques.* Cassini, 1999.

15. Jürgen Jost . *Partial differential equations.* Springer, 2002

16. Jürgen Jost & Xianqing Li-Jost. *Calculus of variations.* Cambridge Univ. Press, 1998.

17. Wolfgang Kühnel. *Differential geometry.* AMS, 2002.

18. H. Blaine Lawson. *Lecture on minimal submanifolds.* Publish or Perish, 1980.

19. A. Martin. *Equations aux dérivées partielles.* Dunod, Paris, 1991.

20. Raghavan Narasimhan & Yves Nievergelt. *Complex analysis in one variable.* Birhhäuser, 2001.

21. Walter Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill (third edition), 1987.

22. Jorge Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias.* Projeto Euclides, 1979.

23. Michael Struwe. *Variational methods.* Springer, 1996.

24. Georges Valiron. *Équations fonctionnelles.* J. Gabay, 1989.

25. Wolfgang Walter. *Ordinary differential equations.*Springer, 1997.

26. Daniel Zwillinger. *Handbook of differential equations.* Segunda edição, Academic Press, 1992.