EQS DIFERENCIAIS PARCIAIS I- NOVEMBRO de 2003–Lista 7

Professor: Ricardo Sá Earp

Classificação das E.D.P's clássicas de segunda ordem
Miscelânea de métodos, II

(1) Considere a equação diferencial

$$R(x,y)u_{xx} + S(x,y)u_{xy} + T(x,y)u_{yy} + g(x,y,u,u_x,u_y) = 0 \qquad (1)$$

onde $R^2+S^2+T^2 \neq 0$, sendo R, S, T funções de classe C^1 definidas num aberto U. Considere a mudança de variável *local*

$$\xi = \xi(x,y), \eta = \eta(x,y)$$

(a) Mostre que a equação (1)
é equivalente à

$$A(\xi_x,\xi_y)u_{\xi\xi} + 2B(\xi_x,\xi_y;\eta_x,\eta_y)u_{\xi\eta} + A(\eta_x,\eta_y)u_{\eta\eta} = G(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$$

onde

$$A(u,v) = Ru^2 + Suv + Tv^2$$

$$B(u_1,v_1;u_2,v_2) = Ru_1u_2 + \frac{1}{2}S(u_1v_2 + u_2v_1) + Tv_1v_2$$

$$A(\xi_x,\xi_y)A(\eta_x,\eta_y) - B^2(\xi_x,\xi_y;\eta_x,\eta_y) = \frac{(4RT - S^2)}{4} \cdot \left(\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right)^2$$

(i) Determine uma condição geral sobre R, S, T de modo que a equação (1) seja hiperbólica. Neste caso mostre que ξ, η, podem ser determinados, via duas equações diferenciais de maneira que a equação se escreve da seguinte forma canônica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$$

Nota: A curva $\xi =$ const determinada a partir de ξ de maneira que o coeficiente $A(\xi_x,\xi_y)$ se anula, via uma equação diferencial e a curva $\eta =$ const de maneira que o coeficiente $A(\eta_x,\eta_y)$ se anula, via uma equação diferencial, são chamadas de curvas características da equação (1).

(A) Encontre a solução geral da equação acima quando $F \equiv 0$.

(B) Encontre a forma canônica da equação

$$u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0$$

determinando as curvas características.

(ii) Determine uma condição geral sobre R, S, T de modo que a equação (1) seja parabólica.

Mostre que neste caso ξ, η podem ser escolhidas de maneira que a equação se escreve da seguinte forma canônica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

Nota: A curva $\xi =$ const determinada a partir de ξ de maneira que o coeficiente $A(\xi_x, \xi_y)$ se anula, via uma equação diferencial é chamada de curva característica da equação (1). A função η está determinada por uma escolha de uma função independente de ξ.

(A) Classifique a equação

$$y^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + x^2 u_{yy} = \frac{y^2}{x} u_x + \frac{x^2}{y} u_y$$

colocando-a na forma canônica. Em seguida mostre que a solução geral é dada por

$$u(x, y) = f(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) + g(x^2 + y^2)$$

onde f, g são funções arbitrárias de classe C^2.

(iii) Encontre a forma canônica da equação

$$(n-1)^2 u_{xx} - y^{2n} u_{yy} = n y^{2n-1} u_y$$

integrando a equação.

(iv) Classifique as equação abaixo

$$(2x + a) u_{xx} + 2xy u_{xy} - y^2 u_{yy} = 0$$

segundo os valores de a, determinando os domínios onde a equação é elíptica, parabólica e hiperbólica.

(v) Considere a equação diferencial

$$y^3 u_{xx} - y u_{yy} + u_y = 0$$

Deduza que que as equações características são parábolas, integrando a equação.

(vi) Classifique a equação

$$x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$$

mostrando que a solução geral é dada por

$$u(x,y) = \sqrt{|xy|} \cdot f\left(\frac{y}{x}\right) + g(xy)$$

onde f, g são funções arbitrárias de classe C^2.

(vii) Classifique a equação

$$u_{xx} - 2yu_{xy} + y^2u_{yy} + yu_y = 0$$

encontrando a solução geral.

(2) *Transformada de Laplace e aplicações às equações integrais e diferenciais.*

(a) Defina transformada de Laplace $\mathcal{L}(f)$, de uma função f seccionalmente suave de crescimento no máximo exponencial, discutindo suas propriedades básicas e enunciando os resultados básicos a respeito. Consulte as referências citadas, assim como a tabela em anexo.

(b) Calcule por dois métodos

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}\right), \qquad a > 0$$

(c) Calcule

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\log(1 - a^2/s^2)\right)$$

(d) Seja

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n}\,(n!)^2}$$

a função de Bessel de ordem zero. Determine o raio de convergência da série e mostre que

$$\mathcal{L}(J_0(t)) = (s^2+1)^{-1/2}, \qquad s > 1$$

e que

$$\mathcal{L}(J_0(\sqrt{t}) = s^{-1}e^{-1/4s}, \qquad s > 0$$

Considere a *função erro* das probabilidades dada por

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-r^2} dr$$

(e) Mostre que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right) = \operatorname{erf}(\sqrt{t})$$

Nota : A função *função erro complementar* dada por

$$\operatorname{erfc}(x) := 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-r^2} dr$$

satisfaz

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\, e^{-k\sqrt{s}}\right) = \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right), \qquad k \geqslant 0, s > 0$$

(f) Mostre que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-1/s}}{s\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(2\sqrt{t})$$

(g) Calcule a integral imprópria abaixo, via transformada de Laplace

$$\int_0^\infty t^2 e^{-5t} \cos t \, dt$$

(h) Resolva as equações diferenciais e integrais abaixo, usando transformada de Laplace

(i)

$$\begin{cases} y'' + y' + 5/4 = 1 - u_\pi(t) + \delta(t-10) + t + \operatorname{sen} t + e^t \\ y(1) = 1, y'(1) = -1 \end{cases}$$

(ii)

$$\begin{cases} ty''(t) + y'(t) + ty(t) = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(iii)

$$f(t) = t^n + \int_0^t \operatorname{sen}(t-u) f(u)\, du$$

(iv) Dada $g(t)$ resolva

$$f(t) = g(t) + \int_0^t (t-u) f(u) du$$

(v)

$$\begin{cases} ty'' - (1+2t)y' + (1+t)y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(vi)

$$f(t) = e^t + \int_0^t f(u) du$$

(vii) Dada $g(t)$, mostre que

$$g(t) = \int_0^t \frac{f(u)}{\sqrt{t-u}} du$$

pode ser invertida e encontre

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t} \int_0^t \frac{g(u)}{\sqrt{t-u}} du$$

Nota: A técnica acima pode ser aplicada para resolver o problema cássico de encontrar a "tautochrona" (arco de ciclóide). Também tem aplicações na teoria do controle. Veja, por exemplo, o livro do Churchill citado abaixo.

(viii) Considere o seguinte problema de valor de bordo (fronteira ou contorno)

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) = a^2 y_{xx}(x,t), \qquad x > 0, t > 0 \\ y(x,0) = y_t(x,0) = 0, \qquad x > 0 \\ y(0,t) = F(t), \qquad \lim_{x \to \infty} y(x,t) = 0, \qquad t \geqslant 0 \end{cases} \tag{2}$$

(A) Aplicando formalmente transformada de Laplace na variável t, mostre que a transformada $Y(x,t)$ de $y(x,t)$ satisfaz uma E.D.O. de segunda ordem na variável x resolvendo esta.

(B) Aplicando transformada de Laplace inversa encontre $y(x,t)$, mostrando que de $F(t)$ é suficientemente suave tal $y(x,t)$ é de fato uma solução do problema (2).

(C) Elabore um pequeno resumo dando interpretações físicas de (2), e analisando alguma $F(t)$ particular.

(ix) Considere o seguinte problema de valor de bordo

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) = a^2 y_{xx}(x,t) - g, & x > 0, t > 0, g = \text{const} \\ y(x,0) = y_t(x,0) = 0, & x > 0 \\ y(0,t) = 0, \quad \lim\limits_{x \to \infty} y(x,t) = 0, & t \geqslant 0 \end{cases} \tag{3}$$

(A) Aplicando formalmente transformada de Laplace na variável t, mostre que a transformada $Y(x,t)$ de $y(x,t)$ satisfaz uma E.D.O. de segunda ordem na variável x resolvendo esta.

(B) Elabore um pequeno resumo dando interpretações físicas de (3).

(x) Enuncie um problema geral, sob o ponto de vista matemático, que contenha os problemas acima e determine sua solução. Por exemplo um problema com coeficientes que dependam de x , com um termo homogêneo não constante, e com uma condição de bordo que dependa de t.

(xi) Considere o seguinte problema de valor de bordo

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) = a^2 y_{xx}(x,t), & x > 0, t > 0 \\ y(x,0) = \Phi(x), \quad y_t(x,0) = 0, & x > 0 \\ y(0,t) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} y(x,t) = 0, & t \geqslant 0 \end{cases} \tag{4}$$

(A) Aplicando formalmente transformada de Laplace na variável t, mostre que a transformada $Y(x,t)$ de $y(x,t)$ satisfaz uma E.D.O. de segunda ordem na variável x. Resolva esta aplicando transformada de Laplace na variável x, encontrando uma fórmula geral envolvendo uma convolução. Aplique as condições iniciais, mostrando que a solução é

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\left(\Phi(x+at) + \Phi_1(x-at)\right)$$

onde Φ_1 é a extensão ímpar de Φ dada por $\Phi_1(x) = \Phi(x), x \geqslant 0, \Phi_1(x) = -\Phi(-x), x \leqslant 0$.

(B) Elabore um pequeno resumo dando interpretações físicas de (4).

(xii) Considere o seguinte problema de valor de bordo

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) = a^2 y_{xx}(x,t), & 0 < x < c, t > 0 \\ y(x,0) = y_t(x,0) = 0 \\ y(0,t) = 0, \qquad y_x(c,t) = \dfrac{F(t)}{a^2\rho}, & t \geqslant 0 \end{cases} \tag{5}$$

(A) Mostre que

$$y(x,s) = \frac{1}{a\,\rho}\mathcal{L}(F)(s) \cdot \frac{\sinh(sx/a)}{s\cosh(sc/a)}$$

(B) Elabore um pequeno resumo dando interpretações físicas de (5), e analisando alguma $F(t)$ particular, i.e $F =$ const. Será interessante para você se informar sobre transformadas de Laplace clássicas de certa funções periódicas (no caso " onda triangular"). Veja tabela e veja o livro de Edwards e Penny.

(C) Elabore um pequeno resumo dando interpretações físicas de (5).

(xiii) Considere o seguinte problema de valor de bordo

$$\begin{cases} y_t(x,t) = k y_{xx}(x,t), & x > 0, t > 0 \\ y(x,+0) = 0, & x > 0 \\ -K y_x(0,y) = \varphi_0, \qquad \lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0, & t > 0 \end{cases} \tag{6}$$

(xiv) Mostre que

$$y(x,t) = \frac{\varphi_0}{K}\left(2\sqrt{\frac{kt}{\pi}}\, e^{-x^2/4kt} - x\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right)\right)$$

(xv) Elabore um pequeno resumo dando interpretações físicas de (6).

Esta tabela é uma cortesia do professor George Svetlichny

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\dfrac{1}{s}, \qquad s > 0$
2. e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}, \qquad s > a$
3. t^n, $n =$ inteiro positivo	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \qquad s > 0$
4. t^p, $p > -1$	$\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \qquad s > 0$
5. $\operatorname{sen} at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}, \qquad s > 0$
6. $\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}, \qquad s > 0$
7. $\operatorname{senh} at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}, \qquad s > \|a\|$
8. $\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}, \qquad s > \|a\|$
9. $e^{at}\operatorname{sen} bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}, \qquad s > a$
10. $e^{at}\cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \qquad s > a$
11. $t^n e^{at}$, $n =$ inteiro positivo	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \qquad s > a$
13. $u_c(t)$	$\dfrac{e^{-cs}}{s}, \qquad s > 0$
14. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$
15. $f(ct)$, $c > 0$	$\dfrac{1}{c}F\left(\dfrac{s}{c}\right)$

16. $\displaystyle\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$ $\qquad F(s)G(s)$

17. $\delta(t-c)$ $\qquad e^{-cs}$

18. $f^{(n)}(t)$ $\qquad s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$

19. $(-t)^nf(t)$ $\qquad F^{(n)}(s)$

20. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\,e^{-k^2/4t}$ $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{s}}e^{-k\sqrt{s}}, \quad k \geqslant 0$

21. $\dfrac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}\,e^{-k^2/4t}$ $\qquad e^{-k\sqrt{s}}, \quad k > 0$

22. onda triangular de período $2a$ $\qquad \dfrac{1}{s^2}\,\tanh\dfrac{as}{2}$

23. $\operatorname{erfc}\left(\dfrac{k}{2\sqrt{t}}\right)$ $\qquad \left(\dfrac{1}{s}\,e^{-k\sqrt{s}}\right) \qquad k \geqslant 0, s > 0$

Referências

[1] T. Amaranath. *Partial differential equations*. Segunda edição. Alpha Science, England, 2003.

[2] William E. Boyce & Richard C. DiPrima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Guanabara-Koogan, 1994.

[3] Ruel V. Churchill. *Operational mathematics*. Third edition. 1972.

[4] C. H. Edwards & David E. Penny. *Equações diferenciais elementares*. Prentice-Hall do Brasil, 1993.

[5] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*. AMS, 1998

[6] Jürgen Jost. *Partial differential equations*. Springer, 2002

[7] A. Martin. *Equations aux dérivées partielles*. Dunod, Paris, 1991.

Anthony D. Osborne. *Complex variables and their applications*. Addison-Wesley, 1999.

[8] Daniel Zwillinger. *Handbook of differential equations*. Segunda edição, Academic Press, 1992.