# EQS DIFERENCIAIS PARCIAIS I- NOVEMBRO de 2003–Lista 7

*Professor: Ricardo Sá Earp*

## Classificação das E.D.P's clássicas de segunda ordem
## Miscelânea de métodos, II

(1) Considere a equação diferencial

$$R(x,y)u_{xx} + S(x,y)u_{xy} + T(x,y)u_{yy} + g(x,y,u,u_x,u_y) = 0 \qquad (1)$$

onde $R^2+S^2+T^2 \neq 0$, sendo $R, S, T$ funções de classe $C^1$ definidas num aberto $U$. Considere a mudança de variável *local*

$$\xi = \xi(x,y), \eta = \eta(x,y)$$

(a) Mostre que a equação (1)
é equivalente à

$$A(\xi_x,\xi_y)u_{\xi\xi} + 2B(\xi_x,\xi_y;\eta_x,\eta_y)u_{\xi\eta} + A(\eta_x,\eta_y)u_{\eta\eta} = G(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$$

onde

$$A(u,v) = Ru^2 + Suv + Tv^2$$

$$B(u_1,v_1;u_2,v_2) = Ru_1u_2 + \frac{1}{2}S(u_1v_2 + u_2v_1) + Tv_1v_2$$

$$A(\xi_x,\xi_y)A(\eta_x,\eta_y) - B^2(\xi_x,\xi_y;\eta_x,\eta_y) = \frac{(4RT - S^2)}{4} \cdot \left(\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right)^2$$

(i) Determine uma condição geral sobre $R, S, T$ de modo que a equação (1) seja hiperbólica. Neste caso mostre que $\xi, \eta$, podem ser determinados, via duas equações diferenciais de maneira que a equação se escreve da seguinte forma canônica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$$

Nota: A curva $\xi =$ const determinada a partir de $\xi$ de maneira que o coeficiente $A(\xi_x,\xi_y)$ se anula, via uma equação diferencial e a curva $\eta =$ const de maneira que o coeficiente $A(\eta_x,\eta_y)$ se anula, via uma equação diferencial, são chamadas de curvas características da equação (1).

(A) Encontre a solução geral da equação acima quando $F \equiv 0$.
(B) Encontre a forma canônica da equação

$$u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0$$

determinando as curvas características.

(ii) Determine uma condição geral sobre $R, S, T$ de modo que a equação (1) seja parabólica.
Mostre que neste caso $\xi, \eta$ podem ser escolhidas de maneira que a equação se escreve da seguinte forma canônica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

Nota: A curva $\xi = \text{const}$ determinada a partir de $\xi$ de maneira que o coeficiente $A(\xi_x, \xi_y)$ se anula, via uma equação diferencial é chamada de curva característica da equação (1). A função $\eta$ está determinada por uma escolha de uma função independente de $\xi$.
(A) Classifique a equação

$$y^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + x^2 u_{yy} = \frac{y^2}{x} u_x + \frac{x^2}{y} u_y$$

colocando-a na forma canônica. Em seguida mostre que a solução geral é dada por

$$u(x, y) = f(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) + g(x^2 + y^2)$$

onde $f, g$ são funções arbitrárias de classe $C^2$.

(iii) Encontre a forma canônica da equação

$$(n-1)^2 u_{xx} - y^{2n} u_{yy} = n y^{2n-1} u_y$$

integrando a equação.

(iv) Classifique as equação abaixo

$$(2x + a) u_{xx} + 2xy u_{xy} - y^2 u_{yy} = 0$$

segundo os valores de $a$, determinando os domínios onde a equação é elíptica, parabólica e hiperbólica.

(v) Considere a equação diferencial

$$y^3 u_{xx} - y u_{yy} + u_y = 0$$

Deduza que que as equações características são parábolas, integrando a equação.

(vi) Classifique a equação

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$$

mostrando que a solução geral é dada por

$$u(x,y) = \sqrt{|xy|} \cdot f\left(\frac{y}{x}\right) + g(xy)$$

onde $f, g$ são funções arbitrárias de classe $C^2$.

(vii) Classifique a equação

$$u_{xx} - 2y u_{xy} + y^2 u_{yy} + y u_y = 0$$

encontrando a solução geral.

(2) *Transformada de Laplace e aplicações às equações integrais e diferenciais.*

(a) Defina transformada de Laplace $\mathcal{L}(f)$, de uma função $f$ seccionalmente suave de crescimento no máximo exponencial, discutindo suas propriedades básicas e enunciando os resultados básicos a respeito. Consulte as referências citadas, assim como a tabela em anexo.

(b) Calcule por dois métodos

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}\right), \qquad a > 0$$

(c) Calcule

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\log(1 - a^2/s^2)\right)$$

(d) Seja

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n}\,(n!)^2}$$

a função de Bessel de ordem zero. Determine o raio de convergência da série e mostre que

$$\mathcal{L}(J_0(t)) = (s^2+1)^{-1/2}, \qquad s > 1$$

e que

$$\mathcal{L}(J_0(\sqrt{t}) = s^{-1} e^{-1/4s}, \qquad s > 0$$

Considere a *função erro* das probabilidades dada por

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-r^2} dr$$

(e) Mostre que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right) = \operatorname{erf}(\sqrt{t})$$

Nota : A função *função erro complementar* dada por

$$\operatorname{erfc}(x) := 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-r^2} dr$$

satisfaz

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\, e^{-k\sqrt{s}}\right) = \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right), \qquad k \geqslant 0, s > 0$$

(f) Mostre que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-1/s}}{s\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(2\sqrt{t})$$

(g) Calcule a integral imprópria abaixo, via transformada de Laplace

$$\int_0^\infty t^2 e^{-5t} \cos t \, dt$$

(h) Resolva as equações diferenciais e integrais abaixo, usando transformada de Laplace

(i)

$$\begin{cases} y'' + y' + 5/4 = 1 - u_\pi(t) + \delta(t-10) + t + \operatorname{sen} t + e^t \\ y(1) = 1, y'(1) = -1 \end{cases}$$

(ii)

$$\begin{cases} ty''(t) + y'(t) + ty(t) = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(iii)

$$f(t) = t^n + \int_0^t \operatorname{sen}(t-u) f(u)\, du$$

(iv) Dada $g(t)$ resolva

$$f(t) = g(t) + \int_0^t (t-u)f(u)du$$

(v)

$$\begin{cases} ty'' - (1+2t)y' + (1+t)y = 0 \\ \hfill y(0) = 0 \end{cases}$$

(vi)

$$f(t) = e^t + \int_0^t f(u)du$$

(vii) Dada $g(t)$, mostre que

$$g(t) = \int_0^t \frac{f(u)}{\sqrt{t-u}}du$$

pode ser invertida e encontre

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \int_0^t \frac{g(u)}{\sqrt{t-u}}du$$

Nota: A técnica acima pode ser aplicada para resolver o problema cássico de encontrar a “tautochrona” (arco de ciclóide). Também tem aplicações na teoria do controle. Veja, por exemplo, o livro do Churchill citado abaixo.

(viii) Considere o seguinte problema de valor de bordo (fronteira ou contorno)

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) = a^2 y_{xx}(x,t), \qquad x > 0, t > 0 \\ y(x,0) = y_t(x,0) = 0, \qquad x > 0 \\ y(0,t) = F(t), \qquad \lim\limits_{x\to\infty} y(x,t) = 0, \qquad t \geqslant 0 \end{cases} \tag{2}$$

(A) Aplicando formalmente transformada de Laplace na variável $t$, mostre que a transformada $Y(x,t)$ de $y(x,t)$ satisfaz uma E.D.O. de segunda ordem na variável $x$ resolvendo esta.

(B) Aplicando transformada de Laplace inversa encontre $y(x,t)$, mostrando que de $F(t)$ é suficientemente suave tal $y(x,t)$ é de fato uma solução do problema (2).

(C) Elabore um pequeno resumo dando interpretações físicas de (2), e analisando alguma $F(t)$ particular.

(ix) Considere o seguinte problema de valor de bordo

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) = a^2 y_{xx}(x,t) - g, \qquad x > 0, t > 0, g = \text{const} \\ y(x,0) = y_t(x,0) = 0, \qquad x > 0 \\ y(0,t) = 0, \qquad \lim\limits_{x\to\infty} y(x,t) = 0, \qquad t \geqslant 0 \end{cases} \tag{3}$$

(A) Aplicando formalmente transformada de Laplace na variável $t$, mostre que a transformada $Y(x,t)$ de $y(x,t)$ satisfaz uma E.D.O. de segunda ordem na variável $x$ resolvendo esta.

(B) Elabore um pequeno resumo dando interpretações físicas de (3).

(x) Enuncie um problema geral, sob o ponto de vista matemático, que contenha os problemas acima e determine sua solução. Por exemplo um problema com coeficientes que dependam de $x$ , com um termo homogêneo não constante, e com uma condição de bordo que dependa de $t$.

(xi) Considere o seguinte problema de valor de bordo

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) = a^2 y_{xx}(x,t), \qquad x > 0, t > 0 \\ y(x,0) = \Phi(x), \quad y_t(x,0) = 0, \qquad x > 0 \\ y(0,t) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} y(x,t) = 0, \qquad t \geqslant 0 \end{cases} \tag{4}$$

(A) Aplicando formalmente transformada de Laplace na variável $t$, mostre que a transformada $Y(x,t)$ de $y(x,t)$ satisfaz uma E.D.O. de segunda ordem na variável $x$. Resolva esta aplicando transformada de Laplace na variável $x$, encontrando uma fórmula geral envolvendo uma convolução. Aplique as condições iniciais, mostrando que a solução é

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\left(\Phi(x+at) + \Phi_1(x-at)\right)$$

onde $\Phi_1$ é a extensão ímpar de $\Phi$ dada por $\Phi_1(x) = \Phi(x), x \geqslant 0, \Phi_1(x) = -\Phi(-x), x \leqslant 0$.

(B) Elabore um pequeno resumo dando interpretações físicas de (4).

(xii) Considere o seguinte problema de valor de bordo

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) = a^2 y_{xx}(x,t), & 0 < x < c, t > 0 \\ y(x,0) = y_t(x,0) = 0 & \\ y(0,t) = 0, \qquad y_x(c,t) = \dfrac{F(t)}{a^2\rho}, & t \geqslant 0 \end{cases} \tag{5}$$

(A) Mostre que

$$y(x,s) = \frac{1}{a\,\rho}\mathcal{L}(F)(s) \cdot \frac{\sinh(sx/a)}{s\cosh(sc/a)}$$

(B) Elabore um pequeno resumo dando interpretações físicas de (5), e analisando alguma $F(t)$ particular, i.e $F =$ const. Será interessante para você se informar sobre transformadas de Laplace clássicas de certa funções periódicas (no caso " onda triangular" ). Veja tabela e veja o livro de Edwards e Penny.

(C) Elabore um pequeno resumo dando interpretações físicas de (5).

(xiii) Considere o seguinte problema de valor de bordo

$$\begin{cases} y_t(x,t) = k y_{xx}(x,t), & x > 0, t > 0 \\ y(x,+0) = 0, & x > 0 \\ -K y_x(0,y) = \varphi_0, \qquad \lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0, & t > 0 \end{cases} \tag{6}$$

(xiv) Mostre que

$$y(x,t) = \frac{\varphi_0}{K}\left(2\sqrt{\frac{kt}{\pi}}\, e^{-x^2/4kt} - x\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right)\right)$$

(xv) Elabore um pequeno resumo dando interpretações físicas de (6).

Esta tabela é uma cortesia do professor George Svetlichny

| $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ | $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ |
|---|---|
| 1. $1$ | $\dfrac{1}{s}, \quad s > 0$ |
| 2. $e^{at}$ | $\dfrac{1}{s-a}, \quad s > a$ |
| 3. $t^n$, $n =$ inteiro positivo | $\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$ |
| 4. $t^p$, $p > -1$ | $\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$ |
| 5. $\operatorname{sen} at$ | $\dfrac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$ |
| 6. $\cos at$ | $\dfrac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$ |
| 7. $\operatorname{senh} at$ | $\dfrac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \|a\|$ |
| 8. $\cosh at$ | $\dfrac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \|a\|$ |
| 9. $e^{at}\operatorname{sen} bt$ | $\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$ |
| 10. $e^{at}\cos bt$ | $\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$ |
| 11. $t^n e^{at}$, $n =$ inteiro positivo | $\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$ |
| 13. $u_c(t)$ | $\dfrac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$ |
| 14. $u_c(t)f(t-c)$ | $e^{-cs}F(s)$ |
| 15. $f(ct)$, $c > 0$ | $\dfrac{1}{c}F\left(\dfrac{s}{c}\right)$ |

| | |
|---|---|
| 16. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$ | $F(s)G(s)$ |
| 17. $\delta(t-c)$ | $e^{-cs}$ |
| 18. $f^{(n)}(t)$ | $s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$ |
| 19. $(-t)^n f(t)$ | $F^{(n)}(s)$ |
| 20. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\, e^{-k^2/4t}$ | $\dfrac{1}{\sqrt{s}} e^{-k\sqrt{s}}, \quad k \geqslant 0$ |
| 21. $\dfrac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}\, e^{-k^2/4t}$ | $e^{-k\sqrt{s}}, \quad k > 0$ |
| 22. onda triangular de período $2a$ | $\dfrac{1}{s^2} \tanh \dfrac{as}{2}$ |
| 23. $\operatorname{erfc}\left(\dfrac{k}{2\sqrt{t}}\right)$ | $\left(\dfrac{1}{s}\, e^{-k\sqrt{s}}\right) \qquad k \geqslant 0, s > 0$ |

---

## Referências


[1] T. Amaranath. *Partial differential equations.* Segunda edição. Alpha Science, England, 2003.

[2] William E. Boyce & Richard C. DiPrima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.* Guanabara-Koogan, 1994.

[3] Ruel V. Churchill. *Operational mathematics.* Third edition. 1972.

[4] C. H. Edwards & David E. Penny. *Equações diferenciais elementares.* Prentice-Hall do Brasil, 1993.

[5] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations.* AMS, 1998

[6] Jürgen Jost. *Partial differential equations.* Springer, 2002

[7] A. Martin. *Equations aux dérivées partielles.* Dunod, Paris, 1991.

Anthony D. Osborne. *Complex variables and their applications.* Addison-Wesley, 1999.

[8] Daniel Zwillinger. *Handbook of differential equations.* Segunda edição, Academic Press, 1992.