EQS DIFERENCIAIS PARCIAIS I , DEZEMBRO de 2003–Lista 8

Professor: Ricardo Sá Earp

E.D.P's clássicas de segunda ordem

–Equações da Laplace, calor, onda e equs. afins

Miscelânea de métodos, III

(1) Responda verdadeiro ou falso. Caso verdadeiro dê uma resposta completa, escrevendo uma explicação cabal e uma dedução sucinta. Caso falso esboce um contra-exemplo.

(a) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de classe C^2. Seja u uma função de classe C^2 em $\overline{U}$, que é solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \triangle u = u^3, & x \in U \\ u = 0, & x \in \partial U \end{cases}$$

Segue então que $u \equiv 0$.

(b) A função

$$u = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

é a única solução da equação de Monge-Ampère

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 1$$

(c) Uma função harmônica $u(x_1, \ldots, x_n)$ que se anula na fronteira da faixa $\{a < x_1 < b\}$ é identicamente nula.

(d) Uma função $u(x, y)$ que satisfaz a equação

$$u_{xx} + u_{yy} + 2u = 0$$

no quadrado $U := \{0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}$ satisfazendo $u = 0$ em ∂U é identicamente nula em U.

(e) Uma função hamônica $u(x, y)$ no setor $S := \{\frac{-\pi}{2\alpha} < \theta < \frac{\pi}{2\alpha}\}$ que se anula no bordo de U é necessariamente nula.

(f) Seja u é uma função subharmônica positiva num domínio $U \subset \mathbb{R}^n$.

(i) Se $t > 1$ então u^t é ainda subharmônica positiva e satisfaz um princípio do máximo.

(ii) Se u é harmônica, então $\log u$ é superharmônica em U, i.e $-\log u$ é subharmônica em U.

(g) Se u é subharmônica em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ então $w(x) := x \cdot \nabla u(x)$ é ainda harmônica, onde $\cdot$ é o produto escalar usual em $\mathbb{R}^n$.

(h) Se u é harmônica em $U \subset \mathbb{R}^n$ então os zeros de u podem ser isolados.

(i) Seja $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma função harmônica semi-espaço $\mathcal{H} := \{x_n > 0\}$, que é contínua e limitada no semi-espaço fechado $\overline{\mathcal{H}}$. Segue que se $u = 0$ em $\partial\mathcal{H} := \{x_n = 0\}$, então $u \equiv 0$ em $\mathcal{H}$.

(j) Seja $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma função harmônica semi-espaço $\mathcal{H} := \{x_n > 0\}$, que é contínua no semi-espaço fechado $\overline{\mathcal{H}}$. Segue que se $u = 0$ em $\partial\mathcal{H} := \{x_n = 0\}$, então $u \equiv 0$ em $\mathcal{H}$.

(k) Seja $u(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ uma função harmônica em $\mathbb{R}^{n+1}$ satisfazendo $u(x, 0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Segue então que $u(x, -y) = -u(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

(l) Seja Seja $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma função harmônica em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo

$$|u(x) \leqslant A(1 + |x|^p), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

onde $A \in \mathbb{R}$ e $p \geqslant 0$. Segue então que u é um polinômio de grau no máximo p.

(m) Uma função harmônica $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ limitada no exterior do disco $U := \{|x| > 1\}$, que se anula no bordo $\partial U := \{|x| = 1\}$, i.e $u = 0$ em ∂U, é identicamente nula em U.

(n) Seja u uma função harmônica real em $U \subset \mathbb{R}^n$ satisfazendo

$$\limsup_{k \to \infty} u(a_k) \leqslant M$$

para toda seqüência $\{a_k\}$ em U convergindo ou bem à um ponto de ∂U ou bem à ∞. Segue então que $u \leqslant M$ em todo U.

(o) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, um domínio, $\Omega \neq \mathbb{R}^2$. Seja u uma função harmônica real limitada em Ω satisfazendo

$$\limsup_{k \to \infty} u(a_k) \leqslant M$$

para toda seqüência $\{a_k\}$ em Ω convergindo à um ponto de $\partial\Omega$. Segue então que $u \leqslant M$ em todo Ω.

(p) A função $u(x) = |x|^t$, $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ é subharmônica para $t \geqslant 2 - n$.

(q) Uma família de funções harmônicas limitadas num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é normal e vale um princípio de compacidade para funções harmônicas.

(2) Considere o seguinte problema com valor inicial

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du + cu = f(x,t) & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g(x) & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

(a) Resolva o caso homogêneo, i.e $f \equiv 0$.
(b) Resolva o não homogêneo exibindo uma fórmula geral explícita e explicando como intervém o *princípio de Duhamel.*

(3) Considere o seguinte problema de valor de contorno (ou de bordo)

$$\begin{cases} -\triangle u = f & \text{em } B_r(0) \\ u = g & \text{em } \partial B_r(0) \end{cases}$$

(a) (Desigualdade de Harnack) Usando a fórmula de Poisson no disco mostre que se u é uma função harmônica positiva em $B_r(0)$ então

$$r^{n-2}\frac{r-|x|}{(r+|x|)^{n-1}}u(0) \leqslant u(x) \leqslant r^{n-2}\frac{r+|x|}{(r-|x|)^{n-1}}u(0)$$

Use a desigualdade acima para mostrar que o teorema de Liouville: Uma função harmônica em $\mathbb{R}^n$ limitada inferiormente é constante.
(b) Mostre que existe uma constante C, tal que

$$\max_{B_r(0)} |u| \leqslant C \left(\max_{\partial B_r(0)} |g| + \max_{B_r(0)} |f| \right)$$

(4) Considere o seguinte problema com valor inicial

$$\begin{cases} u_t - k\triangle u + cu = f & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases} \tag{1}$$

onde $k, c \in \mathbb{R}$.
(a) Assuma $c = 0$. Resolva primeiramente o caso homogêneo $f \equiv 0$. Resolva o problema não homogêneo neste caso exibindo uma fórmula explícita. Chame $w(x,t)$ tal solução.
(b) Considere o caso homogêneo $f \equiv 0$. Chame $u_h(x,t)$ tal solução do homogêneo associado à (1). Mostre que $w = e^{ct}\, u_h(x,t)$ é solução do item anterior. Encontre uma fórmula geral para $u_h(x,t)$.
(c) Usando o princípio de Duhamel e reduzindo ao caso resolvido no item (a) em que $c = 0$, obtenha uma fórmula explícita para a solução do problema (1).

(5) Considere o seguinte problema com valor inicial

$$\begin{cases} u_t - k\triangle u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases} \tag{2}$$

onde $k \in \mathbb{R}$. Assuma que $g(x)$ é uma função ímpar na variável x_n contínua e limitada em $\mathbb{R}^n$. Isto é $g(x_1,\ldots,x_{n-1}x_n) =$
$- g(x_1,\ldots,x_{n-1} - x_n)$, donde $g(x_1,\ldots,x_{n-1},0) = 0$. Encontre uma fórmula explícita para a solução geral $u(x,t)$ de (2) que dependa apenas dos valores de $g(y)$ para $y \in \mathbb{R}^n_+ := \{x_n > 0\}$.

(6) Considere o seguinte problema com valor inicial/bordo em 1 variável espacial

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = 0, & t > 0 \\ u_x(\infty,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = g(x), & x \geqslant 0 \end{cases} \tag{3}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ e g é contínua e limitada.

(a) Relaciona as soluções de (3) e (2).

(b) Obtenha solução de (3) via dois métodos distintos, sendo que num destes faça uso da transformada de Laplace.

(7) Considere a equação (1 variável espacial)

$$u_t = \alpha u_{xx} + \beta u_x + \gamma u \tag{4}$$

(a) Mostre que a existe uma mudança de variável da forma

$$w(x,t) = \mathrm{e}^{ax+bt}\, u(x,t)$$

que transforma a equação acima numa equação da forma

$$w_t = kw_{xx}$$

(b) Resolva o problema geral não homogêneo com condição inicial, exibindo uma fórmula explícita, para a equação (4).

(8) Considere o seguinte problema de valor inicial/bordo

$$\begin{cases} u_t - a\triangle u + b|Du|^2 = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases} \tag{5}$$

onde a, b são constantes.

(a) Encontre uma função real $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que *lineariza* (5), i.e de modo que $w := \varphi(u)$ satisfaça à uma equação linear. Tal transformação

w é chamada de *transformação de Hopf-Cole*. Exiba uma fórmula explícita para a solução quando g é limitada.

(b) No caso de 1 variável espacial x, faça o mesmo para uma equação mais geral admitindo um termo linear da forma $cu_x, c \in \mathbb{R}$. Exiba uma fórmula explícita para a solução quando g é limitada.

(9) Considere o seguinte problema com valor inicial/bordo (1 variável espacial)

$$\begin{cases} au_{xx} + bu + u_t = 0, & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u_0\, \mathrm{e}^{-\alpha t}, & t > 0 \\ u(l,t) = u_0\, \mathrm{e}^{-\beta t}, & t > 0 \\ \lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0, & 0 < x < l \end{cases} \tag{6}$$

onde $a, b, l, \alpha, \beta > 0$, e $a\pi^2 > bl^2$.

(a) Faça a mudança de variável $u(x,t) = w(x,t) + (a_1 x + b_1)u_0\, \mathrm{e}^{-\alpha t} + (a_2 x + b_2)u_0\, \mathrm{e}^{-\beta t}$ e mostre que as constantes a_1, a_2, b_1, b_2 podem ser escolhidas de modo que as condições de bordo são triviais e reduza o problema a um problema não homogêneo relativo a mesma equação com condições de bordo e inicial triviais. Encontre a solução $w(x,t)$ via o método das variáveis separadas, resolvendo primeiramente o problema homogêneo associado. Em seguida desenvolva os termos não homogêneos nas respectivas séries de Fourier (de senos), determinadas pela solução do homogêneo, mostrando que uma solução particular de (6) é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \left(1 - \frac{x}{l}\right) u_0\, \mathrm{e}^{-\alpha t} + \frac{x}{t}\, u_0\ \mathrm{e}^{-\beta t} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u_0}{n\pi} \left(\frac{(b-\alpha)\, \mathrm{e}^{-\alpha t}}{\alpha + a\dfrac{n^2\pi^2}{l^2} - b} + (-1)^n \frac{(\beta - b)\, \mathrm{e}^{-\beta t}}{\beta + a\dfrac{n^2\pi^2}{l^2} - b} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \end{aligned} \tag{7}$$

com $a\pi^2 > bl^2$.

(10) Considere o problema com condição inicial/bordo (1 variável espacial)

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{tt} + \lambda u = 0, & 0 < x < a, \quad 0 < t < b \\ u(0,t) = 0, & 0 \leqslant t \leqslant b \\ u(a,t) = 0, & 0 \leqslant t \leqslant b \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant a \\ u_t(x,b) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant a \end{cases} \tag{8}$$

onde $\lambda, a, b \in \mathbb{R}$.

Usando o método de separação das variáveis, encontre uma solução elementar do problema, obtendo uma solução na forma de um produto de senos e cossenos.

(11) Considere o problema de Sturm-Liouville

$$x^2 X_{xx} + 3x X_x + \lambda X(x) = 0$$

com $X(1) = 0$ e $X(e) = 0$ e $\lambda = a^2$.

(a) Notando que a equação acima é uma equação de Euler mostre que os auto-valores do problema de Sturm -Liouville são $\lambda_n = a_n^2 = 1 + n^2\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$ e as respectivas auto-funções são dadas por

$$X_n(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen}(n\pi \ln x), \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

(b) Verifique a relação de ortogonalidade

$$\int_1^e X_n X_p \, x \, \mathrm{d}x = 0, \qquad n \neq p$$

(c) Seja $v_n(x)$ um sistema ortogonal completo de $L_x^2[1, e]$, obtido normalizando-se o sistema ortogonal X_n. Seja f uma função de classe C^1 em $[1, e]$ cujo desenvolvimento na série de auto-funções é dado por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n v_n(x)$$

Calcule b_n.

(d) Fazendo uso do método de separação das variáveis, mostre que uma solução particular do problema com valor inicial/bordo

$$\begin{cases} u_{tt} = x^2 \, u_{xx} + 3x \, u_x, & 1 < x < e, \quad t > 0 \\ u(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(e,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = 0, & 1 < x < e \\ u_t(x,0) = f(x) & 1 < x < e \end{cases} \tag{9}$$

é dada por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + n^2 + \pi^2}} \left(\int_1^e \sqrt{2} f(x) \sin(n\pi \ln x) \, \mathrm{d}x \right) \frac{\sqrt{2}}{x} \sin \sqrt{1 + n^2\pi^2 t} \, \operatorname{sen}(n\pi \ln x)$$

(12) Considere o seguinte problema de valor inicial/bordo

$$\begin{cases} u_t - \triangle u = f & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ u = g & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases} \tag{10}$$

Assuma que os dados f e g são suaves e que $u(x,t)$ seja uma solução suave de (11) que, juntamente com suas derivadas parciais, *se anula no infinito*.

Mostre que

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 + |D^2u|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant C \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}^n} |Dg|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right)$$

(13) Considere o seguinte problema de valor inicial/bordo

$$\begin{cases} u_t - \triangle u + cu = 0 & \text{em } U \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{em } \partial U \times [0,\infty) \\ u = g & \text{em } U \times \{t=0\} \end{cases} \tag{11}$$

onde c é uma constante.

(a) Assuma $c = 0$. Mostre que

$$\|u(.,t)\|_{L^2(U)} \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \|g\|_{L^2(U)}, \qquad t \geqslant 0$$

onde $\lambda_1 > 0$ é o primeiro valor próprio do Laplaciano espectral, i.e de $-\triangle$.

(b) Assuma que $c \geqslant \lambda > 0$.
Mostre que

$$|u(x,t)| \leqslant C\,\mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad (x,t) \in U_T$$

(14) (a) Considere a equação diferencial

$$u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$$

usando a técnica de D'Alembert, fatorando a E.D.P, mostre que a integração pode ser reduzida à integração de equações de primeira ordem, mostrando que a integral geral é dada por

$$u(x,y) = f(x-y) + g(3x+y)$$

onde f, g são funções arbitrárias. Generalize o método para uma equação do tipo

$$u_{xx} + (a+b)\, u_{xy} + ab\, u_{yy}$$

onde a, b são constantes.

(b)

$$u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = \frac{x^2}{y}$$

usando a técnica de D'Alembert, fatorando a E.D.P, mostre que a integração pode ser reduzida à integração de equações de primeira ordem, mostrando que a integral geral é dada por

$$u(x,y) = yf(3x-y) + g(3x-y) + \\ + \frac{1}{81}\left(\frac{y^3}{6} + y^2(3x-y) + (3x-y)^2\left(y\ln|y| - y\right)\right)$$

onde f, g são funções arbitrárias.

(c) Considere a equação diferencial

$$x^2\, u_{xx} + 2xy\, u_{xy} + y^2\, u_{yy} = x^2y^2$$

(i) Levando em conta que a equação acima é uma equação de Euler, faça as mudanças de variáveis $x = \mathrm{e}^X$ e $y = \mathrm{e}^Y$ transformando a equação numa equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes.

(ii) Usando a técnica de D'Alembert, fatorando a E.D.P, mostre que a integração pode ser reduzida à integração de equações de primeira ordem, mostrando que a integral geral é dada por

$$u(x,t) = \frac{x^2y^2}{12} + yf\left(\frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{x}{y}\right)$$

onde f, g são funções arbitrárias.

(iii) Resolva o mesmo problema pelo método das curvas características. Compare os dois métodos.

A lista 8 de E.D.P. oficialmente termina aqui. Contudo resolvi alinhavar alguns desenvolvimentos da equação de Laplace e de equações afins no âmbito das *Variáveis Complexas* e da *Geometria Diferencial*.

* * *

* * *

Incursão sobre funções harmônicas no plano complexo

Considere Ω um domínio do plano complexo $\mathbb{C}$ e $u(z),\ z = x+iy$ uma função harmônica (real) em Ω. Lembremos que a *diferencial conjugada harmônica* está definida por

$$^*du = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

Dizemos que v é *conjugada harmônica* de u em Ω, se existe uma função holomorfa f tal que $f = u + iv$ (logo v é harmônica). Note que se γ é homóloga a zero em Ω, tem-se que

$$\int_\gamma {}^*du = 0$$

Conclua que quando Ω é simplesmente conexo a conjugada harmônica v está bem definida, ou seja *não é uma função multi-valente.* Conclua também que, se γ é uma curva regular então

$$\int_\gamma \frac{\partial u}{\partial n}|\,\mathrm{d}z| = 0$$

onde n é normal unitário ao longo de γ.

Note que se o bordo orientado Γ de Ω é composto por curvas analíticas, então

$$\int_\Gamma {}^*du = 0$$

No caso não simplesmente conexo a conjugada harmônica pode ter períodos. Os períodos de u estão definidos por

$$\int_{\gamma_j} {}^*du, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

onde $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ correspondem aos ciclos que geram a classe de homologia de Ω. Note que se Ω é uma região *multi-conexa* e se $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$

correspondem aos ciclos que geram a classe de homologia de Ω, então , u tem uma conjugada harmônica, se e somente se

$$\int_{\gamma_j} {}^*du = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Seja $\mathcal{A}$ um anel em $\mathbb{C}$, e seja $z_0 \in \mathcal{A}$. Suponha que a conjugada harmônica tenha período $2\pi i\alpha$. Pense na seguinte função

$$\mathrm{e}^{v(z)/\alpha} \qquad z \in \mathcal{A}$$

Pense numa fórmula explícita de uma função harmônica u que possua uma bem definida conjugada harmônica v num anel $1 < |z| < 2$.

Suponha agora que Ω seja um domínio multi-conexo e seja $K_1, \ldots, K_n$ as componentes conexas limitadas de $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Tome $a_j \in K_j, \quad j = 1, \ldots, n$. Sejam $2\pi c_1, 2\pi c_2, \ldots, 2\pi c_n$, os períodos da função harmônica u definida em Ω. Note que existe uma função analítica h em Ω tal que

$$u = \Re h + \sum_1^n c_j \log|z - a_j|$$

Conclua que se $f(z)$ é uma função holomorfa no anel $0 < r < |z| < \infty$, que não se anula, então existe uma função harmôica limitada h em $r < s < |z| < \infty$, e uma função H harmônica em $\mathbb{C}$ tal que

$$\log|f(z)| = c \log|f(z)| + h(z) + H(z)$$

Seja $u(z)$ uma função harmônica num disco perfurado $\mathcal{D}^* = \{0 < |z| < \varepsilon\}$, e considere a função holomorfa, possivelmente multi-valente $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, onde v é a conjugada harmônica de u. Note que $f'(z)$, é uma função holomorfa bem definida em $\mathcal{D}^*$, deduza que $f'(z)$ possui um desenvolvimento de Laurent em $\mathcal{D}^*$. Conclua com isso que $f(z)$, tem a seguinte expressão

$$f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

Pense na série acima. Conclua além disso que $f(z)$, como *função holomorfa possivelmente multi-valente*, tem a seguinte expressão

$$f(z) = a + a_{-1} \log z + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq -1}}^{\infty} \frac{a_n z^{n+1}}{n+1}$$

Conclua ainda que a função harmônica u em $\mathcal{D}^*$ tem o seguinte desenvolvimento ($z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$)

$$u(r,\theta) = c\log r + \sum_{-\infty}^{\infty}(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)r^n$$

e conclua também que u é parte real da função holomorfa possívelmente multi-valente $f(z) = c\log z + \sum_{-\infty}^{\infty}(\alpha_n - i\beta_n)z^n$. Finalmente, usando o que foi estabelecido neste item, dê outra dedução do item logo acima. Conclua que uma função harmônica *limitada* num disco perfurado $\mathcal{D}^*$, admite uma extensão harmônica a todo o disco. Conclua que se u é uma função harmônica no disco perfurado média de u ao longo de círculos concêntricos de centro a e raio $r < R$ é uma função linear de $\log r$, ou seja existem constantes reais α e β tal que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + r\,\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta = \alpha\log r + \beta$$

Conclua daí uma outra dedução do item acima

Agora suponha que Ω seja uma região cujo bordo é composto por curvas analíticas simples fechadas. Seja Γ o bordo orientado de Ω. Suponha que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, seja uma função de classe C^1 em $\overline{\Omega}$. Note as seguintes identidades

$$\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2i}\int_\Gamma f\,\mathrm{d}z$$

$$\int_\Gamma (vdu - udv) = 4i\iint_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial \overline{z}}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

Além disso note que se u e v são de classe C^1 em $\overline{\Omega}$, e de classe C^2 em Ω, tem-se a *identidade de Green*

$$\int_\Gamma (v^* du - u^* dv) = \iint_\Omega v\triangle u - u\triangle v\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

Note que se u, v são harmônicas em Ω, e γ é um ciclo homólogo a zero em Ω, então

$$\int_{\Gamma} (v^* du - u^* dv) = 0$$

Conclua daí outra dedução da fórmula da média de uma função harmônica num disco perfurado obtida no item c) iv) acima. Conclua também que se u e v são funções harmônicas em Ω e de classe C^1 em $\overline{\Omega}$, então $\int_{\Gamma} v^* du = \int_{\Gamma} u^* dv$.

Note que a soma dos períodos de uma função harmônica, associados a todas componentes do bordo de um domínio multi-conexo Ω, é zero.

Algumas propriedades básicas

Agora vamos enfocar algumas propriedades básicas de funções harmônicas e subharmônicas, algumas de muito importância no que se segue.

Seja u uma função harmônica em $\mathcal{D} = B_1(0)$. Seja f uma função holomorfa em $\mathcal{D}$ tal que $\Re f = u$ (por quê existe tal f ?) Note que para $|z| < r$ onde $0 < r < 1$ tem-se que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r\,\mathrm{e}^{it}) \frac{r\,\mathrm{e}^{it} + z}{r\,\mathrm{e}^{it} - z}\,\mathrm{d}t$$

Deduza daí a fórmula de Poisson no disco $|z| < r$ para u. Ou seja

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r\,\mathrm{e}^{it}) \frac{r^2 - |z|^2}{|r\,\mathrm{e}^{it} - z|^2}\,\mathrm{d}t$$

Note que a *desigualdade de Harnack* segue quase que imediatamente da seguinte estimativa do *núcleo de Poisson*

$$\frac{r - |z|}{r + |z|} \leqslant \frac{r^2 - |z|^2}{|r\,\mathrm{e}^{it} - z|^2} \leqslant \frac{r + |z|}{r - |z|}, \qquad |z| < r$$

Uma função u de classe C^2 definida num domínio Ω é chamada de subharmônica, se $\triangle u \geqslant 0$ em Ω. Demonstre com todos os detalhes o princípio do máximo interior e do bordo para funções subharmônicas. Defina funções subharmônicas assumindo apenas u semi-contínua superiormente e estude as várias propriedades. Note que se uma seqüência $\{u_n\}$ de funções harmônicas num aberto U, converge uniformemente a uma função u em compactos de U, então u é necessariamente harmônica. Note que a seqüência das derivadas parciais converge uniformemente em compactos para a derivada parcial de u. *Sugestão* : Você pode usar a fórmula do item anterior.

Considere a *desigualdade de Harnack* para funções harmônicas. Deduza também o *teorema de Liouville* : Se uma função harmônica definida em todo o plano complexo é, limitada ou bem superiormente ou bem inferiormente, então é necessariamente uma constante.

Deduza o *teorema de três círculos de Hadamard*: Seja $u(z)$ uma função subharmônica num domínio Ω, contendo dois círculos concêntricos de raios r_1 e r_2 e o anel delimitado por estes. Seja $M(r)$ o máximo de u num determinado círculo de raio r, então para $r_1 < r < r_2$, note que vale a seguinte desigualdade

$$M(r) \leqslant \frac{M(r_1)\log(r_2/r) + M(r_2)\log(r/r_1)}{\log(r_2/r_1)}$$

e ocorre a igualdade, se e somente se

$$u = \frac{M(r_1)\log(r_2/r) + M(r_2)\log(r/r_1)}{\log(r_2/r_1)}$$

onde $r = |z|$. *Sugestão* : Aplique o princípio do máximo de forma conveniente. Conclua o *teorema de Liouville*: Se uma função subharmônica definida em $\mathbb{C}^*$, o plano complexo menos um ponto, é limitada superiormente então é uma constante. Mais geralmente, note que se a hipótese de ser limitada superiormente é enfraquecida e substituída por

$$\liminf \frac{M(r)}{|\log r|} \leqslant 0$$

quando $r \to 0$ e quando $r \to \infty$, obtemos também que u é uma constante.

Função de Green

Seja U um aberto de $\mathbb{C}$ e seja $p \in U$. Uma função g é chamada de *função de Green para U com singularidade em p*, se

$$g \text{ é harmônica em } M \setminus \{p\}$$

$$g > 0 \quad \text{em } M \setminus \{p\}$$

se z é uma coordenada (conforme) se anulando em p, então

$$g(z) + \log|z| \text{ é harmônica numa vizinhança de } p.$$

se $\tilde{g}$ é outra funçao satisfazendo as três propriedades anteriores , então $\tilde{g} \geqslant g$

Note que a definição da função de Green acima não depende da escolha de "coordenadas locais" se anulando em p. Note que a função de Green para o disco unitário com singularidade em a é

$$g(z) = \log\left|\frac{1 - z\overline{a}}{z - a}\right|$$

Note que a função de Green no semi-plano à direita $\{\Re z > 0\}$, é

$$\log\left|\frac{z + \overline{a}}{z - a}\right|$$

Exiba a função de Green para os domínios simplesmente conexos tratados na lista 8. Seja Ω um domínio de $\mathbb{C}$ de fecho compacto tal que $\partial\Omega$ consiste de um número finito de arcos analíticos. Seja $z_0 \in \Omega$. Resolvendo o problema de Dirichlet para funções harmônicas sendo dada uma função contínua f no bordo (o que sempre é possível, por quê ?), quando $f(z) = \log|z - z_0|,\ z \in \partial\Omega$, encontramos uma função u contínua em $\overline{\Omega}$ e harmônica em Ω tal que u restrita à $\partial\Omega$ é igual a f. Note que $g(z) = -\log|z - z_0| + u(z)$ é a função de Green para Ω com singularidade em z_0.

Nota (Sobre conceitos importantes de superfícies de Riemann). Vamos fazer uma incursão nas *superfícies de Riemann.* O leitor deve está pelo menos ciente das definições básicas. De qualquer maneira, para os interessados na Análise Complexa, mas que não estão familiarizados com o conceito, basta saber por ora que *todo aberto conexo do plano complexo* $\mathbb{C}$ é uma superfície de Riemann. A existência de uma função de Green num ponto está ligada à *existência de medidas harmônicas* (veja abaixo) e é *equivalente* a noção de *hiperbolicidade* . Uma função de Green se aoroxima de 0 quado um ponto se aproxima do bordo de Ω em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Numa *superfície de Riemann parabólica* o problema de Dirichlet para funções harmônicas tem no máximo uma solução limitada.

Vamos definir os importantes conceitos de parabolicidade e hiperbolicidade para uma superfície de Riemann. Diz- se que uma superfície de Riemann M é parabólica se M não é compacta e se não admite uma função negativa ($\leqslant 0$) subharmônica sobre M que não seja uma constante. Uma superfície de Riemann é chamada hiperbólica se possui uma função subharmônica negativa ($\leqslant 0$) sobre M que não é uma constante. Uma superfície de Riemann compacta é chamada de elíptica. Note que uma superfície de Riemann hiperbólica não pode ser compacta. Note também que segue de um exercício anterior que $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^*$ são superfícies de Riemann parabólicas. Por quê ? Claro que que a bola aberta unitária $\mathcal{D}$ é uma superfície de Riemann hiperbólica. Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{C}$, cuja fronteira orientada Γ, é composta por curvas simples fechadas Suponha que $v = v(x, y)$ seja uma função harmônica que admita derivadas parciais contínuas até o bordo; ou seja $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Seja $a \in \Omega$, e seja $h(x, y) := -\log|z - a| + v(x, y)$. Seja u uma função harmônica em Ω, C^1 até o bordo. Note que (*terceira identidade de Green*)

$$u(a) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \left(u\frac{\partial h}{\partial n} - h\frac{\partial u}{\partial n} \right) \mathrm{d}s$$

onde $a \in \Omega$, e n é o *o normal unitário ao longo de* Γ *apontando para fora*. *Sugestão* Remova uma pequena bola de raio ε em torno de a, e aplique a segunda identidade de Green à u e h. Use a definição de h, e aplique o teorema da média para funções harmônicas. Conclua que se g é a função de Green de Ω com respeito a a, e u satisfaz as hipóteses acima

$$u(a) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} u(z) \frac{\partial g(z, a)}{\partial n} \mathrm{d}s \qquad \text{ou ainda}$$

$$u(a) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} u(z)\ {}^*dg$$

Note que quando $\Omega = B_1(0)$, a fórmula acima é exatamente a *fórmula integral de Poisson para funções harmônicas*, deduzida no item 2). Discuta a fórmula acima relacionando-a com o *problema de Dirichlet para funções harmônicas*.

Consulte no livro de Pommerenke, a relação entre funções de Green, funções harmônicas, *capacidade logarítmica* e *medida de Hausdorff*. Neste livro você encontrará um estudo profundo sobre transformações conformes e comportamento no bordo.

Medidas harmônicas

Considere Ω um domínio multi-conexo e sejam $C_1, \ldots C_n$ as componentes conexas (que podem ser assumidas curvas analíticas, por quê ?) de $\partial\Omega$. Para cada $j = 1, \ldots n$, existe uma função harmônica $\omega_j(z)$ em Ω que toma o valor 1 ma componente C_j e que toma o valor 0 nas demais componentes do bordo de Ω e 21). Recomendamos principalmente os livros de Ahlfors e de Nehari. Tal função harmônica $\omega_j(z)$ é chamada de *medida harmônica*. Isto segue da existncia do problema de Dirichlet; ou ainda, mais concretamente, de certas transformações canônicas de domínios multi-conexos e da relação do problema de Dirichlet com as funções de Green . Note que a *medida harmônica* $\omega_j(z)$ definida no domínio multiconexo Ω cujas componentes do bordo são curvas C_j ($j \in \{1, \dots n\}$) satisfaz

$$\omega_j(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{C_j} \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n_\zeta} \, \mathrm{d} s_\zeta$$

onde $g(\zeta, z)$ é a função de Green de Ω.

Conclua que os períodos da função de Green $g(\zeta, z)$ do domínio multiconexo Ω ao longo da componente do bordo C_j é extamente $-2\pi\omega_j(z)$.

Agora, considere p_{ij} o período da medida harmônica $\omega_j(z)$ ao longo da componente C_i, isto é (por quê ?)

$$p_{ij} = \int_{C_i} \frac{\partial \omega_j}{\partial n} \, \mathrm{d} s$$

Note a seguinte propriedade de simetria: $p_{ij} = p_{ji}$. *Sugestão* : Utilize a fórmula de Green. Note que a matriz simétrica (p_{ij}), $i, j = 1, \dots n-1$ é positiva definida: Em particular, deduza que $\det(p_{ij}) \neq 0$. *Sugestão* : Considere uma combinação linear $\omega(z) := a_1\omega_i(z) + a_2\omega_2(z) + \cdots + a_{n-1}\omega_{n-1}(z)$, onde nem todos os coeficientes sejam nulos e aplique a identidade de Green a $\omega(z)$.

Note que se $u(z)$ é uma função harmônica em Ω, é possível encontrar constantes $A_1, A_2, \dots A_{n-1}$ de maneira que a conjugada harmônica de $u(z) + \sum_{j=1}^{n-1} A_j\omega_j(z)$ não tenha períodos.

Além disso note que o período P_j da conjugada harmônica $v(z)$ de $u(z)$ ao longo de C_j é dado pela fórmula

$$P_j = \int_{\partial\Omega} u(z) \frac{\partial \omega_j(z)}{\partial n} \, \mathrm{d} s$$

Note que não é verdade que toda função holomorfa num domínio multiconexo Ω, é derivada de uma função holomorfa. Note que toda função holomorfa $f(z)$ num domínio multi-conexo Ω, pode ser escrita da forma

$$f(z) = g'(z) + \sum_{j=1}^{n-1} c_j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} z}(\omega_j(z) + i\omega_j^*(z))$$

onde $g(z)$ é uma função holomorfa em Ω, e $\omega_j^*(z)$ é a conjugada harmônica de $\omega_j(z)$. *Sugestão* : Use o resultado do item b) acima.

Fórmula de Jensen e aspectos da teoria de funções meromorfas

Vamos precisar estudar um pouco a função Gamma.

A função Gamma

Considere o *produto*

$$F(z) = z\,\mathrm{e}^{\gamma z} \prod_1^\infty \left(1 + \frac{z}{n}\right) \mathrm{e}^{-\frac{z}{n}}$$

Note que o produto acima define uma função inteira $F(z)$, cujos zeros são precisamente os inteiros negativos e a origem. Mostre ainda que

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} \ + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

O número γ é chamada de *constante de Euler*,$\gamma = 0,5772156\cdots$. Note as seguintes relações funcionais

$$F(z) = zF(z+1)$$

$$\pi F(z)F(1-z) = \sin \pi z$$

Note a seguinte *fórmula de multiplicação*

$$(2\pi)^{(k-1)/2} F\left(\frac{1}{k}\right) F\left(\frac{2}{k}\right) \cdots F\left(\frac{k-1}{k}\right) = \sqrt{k} \qquad k = 2, 3 \ldots$$

Note que a função Gamma definida por $\Gamma(z) = \dfrac{1}{F(z)}$ é uma função meromorfa que não se anula, os pólos de $\Gamma(z)$ são precisamente os inteiros negativos e a origem, todos estes são pólos simples; e $\Gamma(z)$ satisfaz a seguinte relação funcional

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad \text{com} \quad \Gamma(1) = 1$$

Note que

$$\mathrm{Res}(\Gamma, -\mathrm{n}) = \frac{(-1)^\mathrm{n}}{\mathrm{n}!}, \quad \mathrm{n} \in \mathbb{N}$$

Note que a equação funcional acima não caracteriza a função Gamma. Por quê ? Note a *representação produto de Gauss*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

Note que $\Gamma(z)$ é limitada em toda faixa fechada vertical $\{0 < a \leqslant \Re z \leqslant b\}$.

Note a *fórmula de suplemento de Gauss*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Note que

$$\Gamma(n+1/2) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$$

Mostre o cálculo de Raabe (1843)

$$\int_0^1 \log \Gamma(t)\, \mathrm{d}t = \log \sqrt{2\pi}$$

Sugestão É preciso mostrar primeiramente que

$$\int_0^1 \log \sin \pi t\, \mathrm{d}t = -\log 2$$

Para demonstrar a fórmula acima (que também aparece na dedução da *fórmula de sen*) use a fórmula de *duplicação do seno*: $\sin 2\pi z = 2 \sin \pi z \sin \pi(z + \frac{1}{2})$.

Para concluir, use a fórmula de suplemento de Euler.

Seja f uma função holomorfa em $B_1(0)$, a bola aberta de raio 1, centrada na origem. Suponha que $f(0) \neq 0$. Seja $a_1, a_2, \ldots, a_n$, os zeros de f (aparecendo com suas respectivas multiplicidades) na bola de raio r, centrada na origem $B_r(0)$.

Note a *fórmula de Jensen*

$$\log|f(0)| + \log \frac{r^n}{|a_1 a_2 \cdots a_n|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})|\, \mathrm{d}\theta$$

Quando f tem zeros no círculo de raio r, a integral direita da desigualdade é uma integral imprópria. *Sugestão* Deduza a fórmula quando f não tem zeros no disco fechado de raio r. Em seguida demonstre que

$$\int_0^{2\pi} \log|1 - \mathrm{e}^{i\theta}|\, \mathrm{d}\theta = 0$$

Uma maneira de demonstrar o fato acima é deduzir a seguinte identidade (veja uma outra resolução nas refs)

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \log|1-e^{i\theta}|\,d\theta = \pi\log 2 + \int_0^{\pi} \log\sin\theta\,d\theta$$

mas a última integral à direita da igualdade logo acima já foi calculada antes. É preciso tomar certa precaução quando f se anula no círculo $C_r = \partial B_r(0)$ de raio r : Considere a função

$$g(z) := f(z)\prod_1^n \frac{\overline{a_k}z - r^2}{r(z-a_k)}\prod_1^m \frac{b_j}{b_j - z}$$

onde $b_1, b_2, \ldots, b_m$, são os zeros de f em C_r. Mostre que quando f não se anula em C_r (como ocorre nas aplicações), a demonstração se simplifica consideravelmente.
Conclua a *desigualdade de Jensen*

$$|f(0)| \leqslant |a_1 a_2 \cdots a_n||f|_{B_1(0)}$$

Conclua que se f é uma função holomorfa ($f \not\equiv 0$) e *limitada* em $B_1(0)$,e se $a_1, a_2, \ldots,$ é a seqüência de zeros de f, contados com multiplicidade, então

$$\sum(1-|a_n|) < \infty \qquad \text{(condição de Blaschke)}$$

Seja $\{a_1, a_2, \ldots\}$ um subconjunto enumerável de $B_1(0)$, tal que $\sum(1-|a_n|) = \infty$. Note que se f e g são duas funções holomorfas e limitadas em $B_1(0)$, então , se $f(a_j) = g(a_j)$, $j = 1, 2, \ldots$ tem-se que $f \equiv g$.

Seja $\{a_n\}$, uma seqüência na bola $B_1(0)$. O *produto de Blaschke* está definido por

$$B(z) = z^k \prod_1^\infty \frac{z-a_n}{\overline{a_n}z - 1}\cdot\frac{|a_n|}{a_n}, \qquad z \in B_1(0)$$

onde k é um inteiro não negativo
Note que se $\sum(1-|a_n|) < \infty$, então o produto de Blaschke $B(z)$ define uma função holomorfa e limitada na bola $B_1(0)$, cujos zeros são exatamente os pontos a_n (a origem também é um zero se $k > 0$.)

Note que não existe uma função holomorfa em $B_1(0)$, que se anula, com um zero de ordem n, nos pontos $1 - 1/n^2$.

Conclua que dada uma função holomorfa limitada em $B_1(0)$, existe um produto de Blaschke $B(z)$ e uma função holomorfa g em $B_1(0)$, tal que $f = \mathrm{e}^g \cdot B$.
Note que a equivalente condição de Blaschke no semi-plano à direita $\{\Re z > 0\}$ é dada por

$$\sum \frac{\Re a_n}{|1 + a_n|^2} < \infty$$

Definimos $\log^+ t = \log t$, se $t \geqslant 1$, e $\log^+ t = 0$, se $0 < t < 1$. Observe que $\log t = \log^+ t - \log^+(1/t)$. A *família de Nevanlinna*, denotada por $\mathcal{N}$, é o conjunto de funções holomorfas em $B_1(0)$, satisfazendo

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})|\, \mathrm{d}\theta < \infty$$

Note que se $f \in \mathcal{N}$ ($f \not\equiv 0$), e $a_1, a_2, \dots$ são os zeros de f com suas multiplicidades, então

$$\sum (1 - |a_n|) < \infty \qquad \text{(condição de Blaschke)}$$

Seja f uma *função inteira*. Definimos $M(r) = \sup_\theta |f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})|, \quad 0 < r < \infty$. Seja $n(r)$, o número de zeros de f no disco fechado $\overline{B}_r(0)$.
Suponha que $f(0) = 1$. Note que

$$n(r) \log 2 \leqslant \log M(r)$$

Conclua que se $M(r) < \mathrm{e}^{Ar^k}$, para $A > 0, k > 0$ e r suficientemente grande, então

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\log n(r)}{\log r} \leqslant k$$

Note com um exemplo que a igualdade no limite acima pode ser atingida.

Considere f uma função meromorfa no disco fechado $\overline{B}_r(0)$. Seja c um zero ou pólo de *ordem* $m > 0$. Definimos

$n_f(c) = \mathrm{ord}_{\mathrm{c}}(\mathrm{f}) := \mathrm{m}$ se c é um zero, $-\mathrm{m}$ se c é um pólo,

0 quando c não é zero nem pólo

Suponha que $f(z) = c_f z^m +$ *termos de maior ordem*, numa vizinhança da origem. Ou seja f tem ordem m (segundo a definição acima) , i .e

$n_f(0) = m$.

Seja f uma função meromorfa e não constante no disco fechado $\overline{B}_r(0)$. Mostre a seguinte versão da *fórmula de Jensen generalizada*

$$\log|c_j| + \sum_{c\in B_r(0),\ c\neq 0} n_f(c)\log\frac{r}{|a|} + n_f(0)\log r = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta$$

(*Fórmula de Poisson-Jensen*) Seja $f(z)$ uma função meromorfa no disco fechado $|z| \leqslant R$ $(0 < R < \infty)$; ou seja f é meromorfa num aberto de $\mathbb{C}$ que contém este disco fechado. Sejam a_μ $(\mu = 1, \ldots, M)$ os zeros de f e b_ν $(\nu = 1, \ldots, N)$ os pólos de f em $|z| < R$, contados com multiplicidades. Note que se $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ $(0 \leqslant r < R)$, e se $f(z) \neq 0, \infty$, então tem-se que

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(R\,\mathrm{e}^{i\varphi})|\,\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,\mathrm{d}\,\varphi +$$
$$+\sum_1^M\log\left|\frac{R\,(z-a_\mu)}{R^2-\overline{a_\mu}z}\right| - \sum_1^N\log\left|\frac{R\,(z-b_\nu)}{R^2-\overline{b_\nu}z}\right|$$

Sugestão : (1) Considere primeiramente o caso que $f(\zeta)$ é holomorfa e não tem zeros em $|\zeta| \leqslant R$. Mostre que a fórmula de Poisson-Jensen em $z = 0$ segue da fórmula de Cauchy. Para o caso geral considere uma equvalência conforme do disco aberto $|\zeta| < R$ e e o disco aberto unitário $|w| < 1$, que leva um ponto $\zeta = z$ no ponto $w = 0$.
(2) Considere o caso que $f(\zeta)$ tem um número finito de zeros e pólos em $|\zeta| = R$ e não tem outros zeros e pólos no disco aberto $|\zeta| < R$. Neste caso considere o contorno $\partial D(\delta)$, onde $D(\delta)$ é o domínio aberto obtido de $|\zeta| \leqslant R$, removendo-se um pequeno disco de raio δ centrado nos zeros e pólos de $f(\zeta)$: Mostre que se $z \in D(\delta) \subset \{|z| < R\}$, então

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D(\delta)}\log f(\zeta)\,\frac{R^2-|z|^2}{(R^2-\overline{z}\zeta)\,(\zeta-z)}\,\mathrm{d}\,\zeta$$

além disso mostre que o integrando é $O\,(\log 1/\delta)$ uniformemente nas indentações que são arcos de círculo de raio δ, mostrando que a contribuição da integral nas indentações vai para zero quando $\delta \to 0$.

(3) Para o caso geral considere

$$g(\zeta) = f(\zeta) \prod_{1}^{N} \frac{R\,(\zeta - b_\nu)}{(R^2 - \overline{b_\nu}\zeta)} \Big/ \prod_{1}^{M} \frac{R\,(\zeta - a_\mu)}{(R^2 - \overline{a_\mu}\zeta)}$$

Nota: A fórmula de Poisson-Jensen é crucial na teoria moderna das funções meromorfas creada por Nevanlinna. Vamos fazer uma pequena incursão na *teoria de Nevanlinna* (Veja refs).

Defina-se $n_f^+(0) = \max(0, n_f(0))$. Defina-se também

$$N_f(\infty, R) = \sum_{\substack{a\in B_R(0), a\neq 0\\ f(a)=\infty}} -(\mathrm{ord}_{\,\mathrm{a}}\mathrm{f}) \log \frac{\mathrm{R}}{|\mathrm{a}|} + \mathrm{n}^+_{1/\mathrm{f}}(0)\log \mathrm{R}$$

$$N_f(0, R) = \sum_{\substack{a\in B_R(0), a\neq 0\\ f(a)=0}} (\mathrm{ord}_{\,\mathrm{a}}\mathrm{f}) \log \frac{\mathrm{R}}{|\mathrm{a}|} + \mathrm{n}^+_{\mathrm{f}}(0)\log \mathrm{R}$$

Deduza que a fórmula de Jensen generalizada pode ser escrita da forma

$$\log |c_f| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(R\,\mathrm{e}^{i\theta})|\, \mathrm{e}\theta + N_f(\infty, R) - N_f(0, R)$$

Agora seja f uma função meromorfa em $\overline{B}_R$. Para $r < R$, define-se

$$m_f(r) = \int_0^{2\pi} \log^+ |f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})|\, \mathrm{d}\theta \qquad \textit{função proximidade}$$

e

$$G = G^\infty_{R,f}(z) = \prod_{\substack{a\in B_R\\ f(a)=\infty}} G_R(z,a)^{-\mathrm{ord}_{\,\mathrm{a}}\mathrm{f}}$$

onde $G_R(z,a) := \dfrac{R^2 - \overline{a}z}{R(z-a)}$.

Note que as seguintes propriedades da função proximidade ($f_1, f_2, \ldots, f_n$ são funções meromorfas)

$$m_{f_1 f_2} \leqslant m_{f_1} + m_{f_2}$$
$$m_{f_1+\cdots+f_n} \leqslant m_{f_1} + \cdots + m_{f_n} + \log n$$

Note que

$$m_G(r) = N_f(\infty, R) - N_f(\infty, r)$$

A *função altura de Nevanlinna* está definida por

$$T_f(r) = m_f(r) + N_f(\infty, r)$$

Note a versão da fórmula de Jensen generalizada de Nevanlinna

$$T_{1/f}(r) = T_f(r) - \log |c_f|$$

Agora defina-se $n_f(0, r)$ como sendo o número total de zeros na bola aberta $B_r(0)$, de raio r, contados com suas multiplicidades.

Seja $N_f(b, r) = N_{f-b}(0, r)$ (Veja item g) acima).

Exercício-pesquisa: Deduza o seguinte *teorema de Cartan* (Veja ref.)) . Se f é uma função inteira com $f(0) \neq 0$, então

$$m_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N_f(\mathrm{e}^{i\theta}, r) \, \mathrm{d}\theta + \log^+ |f(0)|$$

Conclua que m_f é uma função crescente de r

Mais geralmente note o seguinte *teorema de Cartan*: Se $f(z)$ é meromorfa em $\{|z| < R \leqslant \infty\}$,e $f(0) \neq \infty$ (Veja ref. 3))

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N_f(\mathrm{e}^{i\theta}, r) \, \mathrm{d}\theta + \log^+ |f(0)|$$

Lembremos a definição : $M(r) = \sup_\theta |f(r\, \mathrm{e}^{i\theta})|, \quad 0 < r < \infty.$

Defina $M_f(r) = \log M(r)$.

Mostre que se f é uma função inteira, então para $r < R$ vale

$$M_f(r) \leqslant \frac{R + r}{R - r} m_f(R)$$

Em particular, conclua que $M_f(r) \leqslant 3m_f(2r)$. *Sugestão* Quando f não se anula, aplique a fórmula de Poisson à função $\log |f(z)|$. No caso geral use a fórmula de Poisson-Jensen.

Note que a desigualdade acima vale para funções holomorfas na bola unitária $B_1(0)$, impondo que $r < R < 1$. Mostre com isso que a família de funções holomorfas definida na bola unitária satisfazendo $m_f(r) <$

A, $\forall\ 0 < r < 1$ para $A > 0$, é *normal*.
Conclua que se f é uma função inteira, e se m_f fica limitada, quando $r \to \infty$, então f é constante. Mostre que se existe uma constante k tal que $m_f(R_j) \leqslant k \log R_j$, para uma seqüência de números tal que $R_j \to \infty (j \to \infty)$, então f é um polinômio de grau no máximo k.
Exercício-pesquisa: Seja f uma função meromorfa em $\{|z| < R \leqslant \infty\}$, $a \in \mathbb{C}$. Deduza o *primeiro teorema fundamental de Nevanlinna* (Veja refs)

$$T_f(r) = T_{f-a}(r) + O_a(1) \qquad 0 < r < R$$

onde $|O_a(1)| \leqslant \log^+ |a| + \log 2$.

* * *

Estudo sobre superfícies de $\mathbb{R}^3$.

Vamos explorar certas superfícies especiais, tais como superfícies mínimas, superfícies de curvatura média constante. As superfícies especiais de Weingarten serão tratadas na próxima lista. Vamos explorar e aplicar conceitos importantes tais como equações das geodésicas, fluxo, fórmula do fluxo, princípio do máximo, dentre outros. Vamos aplicar as equações de compatibilidade; equação de curvatura de Gauss e equação de Codazzi-Mainardi.

Você deve fazer um paralelo comparativo com as superfícies de $\mathbb{H}^3$ para entender os conceitos, as fórmulas, os resultados que continuam válidos quando o ambiente é o espaço hiperbólico.

Primeiramente vamos fazer uma incursão pelas superfícies de $\mathbb{R}^3$, tomando *parâmetros isotérmicos*, obtendo com esta ajuda alguns conceitos, fórmulas e resultados fundamentais da geometria das imersões . Considere S uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$. Considere $z = u + iv$ coordenadas isotérmicas locais em uma vizinhança de um ponto $p \in S$; isto é, $E = G$ e $F = 0$, onde E, F, G, são os coeficientes da primeira forma fundamental, relativos a uma parametrização conforme $X(z)$. Vamos denotar também $E = \lambda^2$. Sejam l, m, n, os coeficientes da segunda forma fundamental (Na notação proposta em sala de aula $e = l, f = m, g = n$). Vamos denotar $\{X_1, X_2\}$ o referencial local adaptado à X em p. Usaremos também a notação X_u para designar X_1 e X_v para designar X_2. O gradiente, a divergência e o Laplaciano. Seja $f : S \to \mathbb{R}$ uma função real suave definida em S. Define-se o *gradiente* de f, denotado por ∇f como sendo o campo de vetores tangentes à S satisfazendo

$$\nabla f \cdot v = df_p(v)$$

onde v é tangente à S em p, isto é $v \in T_pS$. Note que

$$\nabla f = \frac{f_u}{E} X_u + \frac{f_v}{E} X_v$$

onde cometemos o abuso de notação usual identificando $f(u,v)$ com $f \circ X(u,v)$.

Define-se a *divergência* de um campo Y de vetores tangentes à S (i. e $Y(p) \in T_pS$), denotada por div , como sendo o traço da aplicação

$Z \to D_Z Y$, onde Z é um campo de vetores tangentes à S, e D é a conexão Riemanniana de S. Ou seja,

$$\operatorname{div} Y = \operatorname{tr}(Z \to D_Z Y)$$

Note

$$\operatorname{div} Y = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial}{\partial u}(Y \cdot X_u) + \frac{\partial}{\partial v}(Y \cdot X_v)\right)$$

Define-se o *Laplaciano* de uma função real suave f definida em S , denotado por $\triangle f$, como sendo

$$\triangle f = \operatorname{div} \nabla f$$

Note

$$\triangle f(p) = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial v^2}\right)$$

onde cometemos o abuso de notação identificando $f(u,v)$ com $f \circ X(u,v)$. Note que os conceitos de gradiente, divergência e Laplaciano pertence à *geometria intrínseca das superfícies*, ou seja dependem apenas da primeira forma fundamental e podem por isto ser definidos numa superfície Riemanniana qualquer. Assim o Laplaciano definido acima é também chamado de *Laplaciano Riemanniano*. Consideremos S munida de sua estrutura de superfície de Riemann (induzida pela métrica de S). Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função real suave. o *Laplaciano conforme relativo à coordenada conforme* z está definido como

$$\triangle_z f = f_{uu} + f_{vv}$$

Note que a definição de Laplaciano conforme depende da coordenada isotérmica z, uma função mas a noção de f ser harmônica na superfície de Riemann não depende. Além disso Note que esta noção de harmonicidade é a mesma considerando o Laplaciano Riemanniano definido no item c).

Um importante teorema da Geometria é o *teorema da divergência*: Seja S uma superfície Riemanniana suave e seja Y um campo suave de vetores tangentes à S. O teorema da divergência (intrínseco) diz o seguinte

$$\int\limits_S \operatorname{div} Y \, \mathrm{d}A = -\int\limits_{\partial S} Y \cdot \eta \, \mathrm{d}s$$

onde $\mathrm{d}A = \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$ é o elemento de área de S, ∂S é o bordo de S, $\mathrm{d}s$ é o elemento comprimento de arco de ∂S, e η é o vetor co-normal *interior* ao longo de ∂S (η é tangente à S, normal à ∂S, apontando para dentro de S). Considere X como sendo o vetor posição de uma superfície orientada S em $\mathbb{R}^3$, por um campo de vetores normais unitários N ao longo de S. Suponha que ∂S seja uma curva (regular) simples fechada γ contida no plano-xy, de modo que $\gamma = \partial D$ onde $D \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio de Jordan. Suponha que $S \cup D$ é um ciclo orientável, de modo que $S \cup D = \partial V$, onde V é um "sólido " de $\mathbb{R}^3$, e o teorema da divergência se aplica (Faça uma figura !). Seja $\triangle_{\mathbb{R}^3}$ o Laplaciano usual de $\mathbb{R}^3$. Note que

$$6\mathrm{vol}(V) + 2\int\limits_S X \cdot N \, \mathrm{d}A = 0$$

Sugestão : Aplique corretamente o teorema da divergência (em $\mathbb{R}^3$) Note que

$$\triangle |X|^2 = 4 + 4HX \cdot N$$

Aplique agora o teorema da divergência *em* S mostrando que

$$\int\limits_S \triangle |X|^2 \, \mathrm{d}A = -2\int_{\partial S} X \cdot \eta \, \mathrm{d}s$$

onde η é o co-normal interior ao longo do bordo de S. Levando em conta os resultados obtidos nos itens ii) e iii) deduza que

$$4\,\text{área}(S) + 4H\int\limits_S X \cdot N \, \mathrm{d}A = -2\int_{\partial S} X \cdot \eta \, \mathrm{d}s$$

Juntando os resultados obtidos nos itens i) e iv) infira

$$2\,\text{área}(S) = 6H\mathrm{vol}(M) - \int_{\partial S} X \cdot \eta \, \mathrm{d}s$$

(*Fluxo numa superfície mínima*). Suponha agora que S seja uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$, orientada por um campo de vetores normal unitário N ao longo de S. Seja ν o co-normal *exterior* ao longo de ∂S. Seja W um campo de vetores suaves em $\mathbb{R}^3$. Considere a componente tangencial W^T de W, ou seja a projeção ortogonal de W no plano tangente à S. Note que

$$W^T = W - (W \cdot N)\, N$$

Seja v um campo *constante* em $\mathbb{R}^3$. Note que v^T é o gradiente de uma função harmônica que é a restrição à S de uma função linear em $\mathbb{R}^3$. *Sugestão* : Você vai precisar do fato que as coordenadas dos pontos de uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$ em parâmetros isotérmicos são funções harmônicas: Veja logo adiante. Note ainda que segue do teorema da divergência a seguinte equação vetorial

$$\int_{\partial S} \nu \,\mathrm{d}s = 0$$

Conclua que para curvas fechadas γ, tem-se que $\int_\gamma \nu \,\mathrm{d}s$, é um invariante de homologia.

O fluxo ao longo de γ está definido pela quantidade

$$\mathrm{Fluxo}([\gamma]) := \int_\gamma \nu \,\mathrm{d}s$$

Nota: Lembremos que a curvatura de Gauss K de uma superfície mínima S é sempre não positiva. A curvatura total denotada por $C(S)$ está definida por

$$C(S) := \int_S K \,\mathrm{d}A$$

Um resultado interessante é o seguinte: Se uma superfície mínima completa mergulhada de curvatura total finita em $\mathbb{R}^3$, tem *fluxo vertical* (i. e o fluxo, Fluxo($[\gamma]$), é um vetor vertical para toda curva fechada $\gamma \subset S$), então S é o plano o catenóide. Veja ref. 7. Nota: A curvatura total pode ser interpretada como a imagem esférica da aplicação normal de Gauss. De modo que quando a curvatura total é finita vale a seguinte fórmula:

$$C(S) = -4\pi n$$

onde n é o grau da aplicação normal de Gauss. Quando a curvatura total é finita segue de um teorema de Huber que S é conformemente equivalente a uma superfície de Riemann compacta $\overline{S}$ de gênero g, removido um conjunto finito de pontos, chamados *puncture*. Os dados meromorfos $(g, f\,\mathrm{d}z)$ se estendem meromorficamente à $\overline{S}$ (*Teorema de Osserman*).

Note que *em parâmetros isotérmicas* $z = u + iv$, tem-se que: A curvatura média H e a curvatura de Gauss K de uma superfície S imersa em $\mathbb{R}^3$ são dados por

$$H = \frac{l+n}{2E} \qquad \text{e} \quad \mathrm{K} = \frac{\mathrm{ln} - \mathrm{m}^2}{\mathrm{E}^2}$$

Idem para uma superfície S imersa em $\mathbb{H}^3$. Deduza que equação das linhas de curvatura *via o método dos multiplicadores de Lagrange*, e infira que em coordenadas isotérmicas a equação das linhas de curvatura é dada por

$$-m\,\mathrm{d}u^2 + (l-n)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + m\,\mathrm{d}v^2 = 0$$

Note as equações de Codazzi-Mainardi:

$$l_v - m_u = \frac{E_v}{2E}(l+n)$$

$$m_v - n_u = -\frac{E_u}{2E}(l+n)$$

Conclua As equações de Codazzi-Mainardi podem ser escritas como

$$\left(\frac{l-n}{2}\right)_u + m_v = EH_u$$

$$\left(\frac{l-n}{2}\right)_v - m_u = -EH_v$$

Sugestão : Parta dos termos a esquerda das equações propostas substituindo os termos pelas definições , em seguide use o fato de que N é normal unitário, X_u e X_v tangentes ortogonais e de mesmo módulo, aplicando simetria e compatibilidade com a métrica, para chegar ao resultado desejado.

Deduza Se $\varphi = \dfrac{l-n}{2} - im$, as equações de Codazzi tomam a *forma complexa*

$$\varphi_{\overline{z}} = EH_z$$

A equação (ou as equações) de Codazzi-Mainardi são *as mesmas* no espaço hiperbólico. Verifique isto ! onde $2\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial u} - i\dfrac{\partial}{\partial v}$, e $2\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial}{\partial u} + i\dfrac{\partial}{\partial v}$. Infira que S tem curvatura média contante, sse φ é holomorfa. Note que isto implica que os pontos umbílicos de uma superfície conexa S imersa em $\mathbb{R}^3$ de curvatura média contante são isolados ou S é totalmente umbílica. Note o mesmo para uma superfície de curvatura média constante imersa em $\mathbb{H}^3$. Note ainda que as linhas de curvatura são dadas pela equação

$$\Im\left(\varphi\cdot(\mathrm{d}z)^2\right)=0$$

Nota: Um fato que pode ser demonstrado é que quando S (conexa) tem curvatura média constante, o índice do campo de linhas de curvatura num ponto singular (i. e num ponto umbílico, necessariamente isolado, se S não é totalmente umbílica) é estritamente negativo. Segue disto, e do teorema de Poincaré-Hopf, o seguinte teorema de Hopf demonstrado nos meados do século vinte. Tal resultado deu um novo impulso à teoria das superfícies de curvatura média constante: *Se uma superfície fechada imersa S em $\mathbb{R}^3$ (não necessariamente mergulhada), topologicamente equivalente a esfera , tem curvatura média constante então S é uma esfera geométrica*. Enuncie e demonstre o correspondente teorema de Hopf no espaço hiperbólico.

Note que quando S tem curvatura média constante a diferencial holomorfa quadrática

$$\varphi\cdot(\mathrm{d}z)^2$$

está globalmente bem definida em S, i. e não depende das escolhas dos parâmetros isotérmicos.

Note a seguinte fórmula

$$\triangle X=2\,\overrightarrow{H}$$

onde $\overrightarrow{H}$ ó vetor curvatura média de S (Note que você pode interpretar X como sendo o vetor posição de S).

Conclua a seguinte caracterização das superfícies mínimas:

$$S \quad \text{é mínima} \qquad \Longleftrightarrow \triangle X=0$$

Ou seja S é mínima, sse as coordenadas de S em $\mathbb{R}^3$ em parâmetros isotérmicos são funções harmônicas.

A idéia agora é enfocar o seguinte: Sejam k_1,τ_1,k_2,τ_2 as curvaturas e torções de duas linhas de curvatura passando por um ponto não umbílico de uma imersão mínima conforme $X:U\subset\mathbb{R}^2\to S$, ($U$ aberto de $\mathbb{R}^2$). Então demonstre o *teorema de Enneper* deduzindo a seguinte fórmula

$$k_1^2\tau_1=k_2^2\tau_2$$

Sugestão : Considere os parâmetros isotérmicos $z=u+iv$, i. e $X=X(z)$. Admita o fato que estes parâmetros podem ser escolhidos (nas vizinhanças de um ponto não umbílico) de forma que as linhas coordenadas sejam linhas de curvatura. Note que isto implica que $m = 0$ e que as equações de Codazzi-Mainardi ficam ($F = m = 0$)

$$l_v = \frac{E_v}{2}\left(\frac{l}{E} + \frac{n}{G}\right)$$
$$n_u = \frac{G_u}{2}\left(\frac{l}{E} + \frac{n}{G}\right)$$

2 Donde conclua que $l = -n = b,\ b \in \mathbb{R}$ (constante). Em seguida use as fórmulas da curvatura e da torção

$$\tau_1 k_1^2 = -\frac{X_u \times X_{uu} \cdot X_{uuu}}{|X_u \times X_{uu}|^2} \cdot \frac{|X_u \times X_{uu}|^2}{|X_u|^6}$$

Para concluir que $X_u \times X_{uu} \cdot X_{uuu} = \dfrac{l}{4}\left(2E_{uv} - \dfrac{E_u E_v}{E}\right)$. Daí segue o resultado desejado. Deduza do teorema de Enneper acima a seguinte proposição : Se uma família de linhas de curvatura de uma superfície mínima é constituída por curvas planas, assim também o é a família de linhas de curvatura ortogonal, numa vizinhança de um ponto não umbílico. Nota: As superfícies mínimas (não planas) cujas linhas de curvatura são curvas planas foram classificadas : Estas são o catenóide, a superfície mínima de Enneper e as superfícies de Bonnet.

Vamos em seguida abordar a famosa *representação de Weierstrass* das superfícies mínimas.

Seja S uma superfície mínima simplesmente conexa em $\mathbb{R}^3$ e $z = u+iv$ parâmetros isotérmicos. Vamos obter "meromorphic data" $(g, f\,\mathrm{d}z)$ que determinam a imersão mínima $X\ : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2$. Seja

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) := X_u - iX_v$$

Note que $z = u + iv$ são parâmetros isotérmicos, sse $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = 0$. Note que X é harmônica, sse Φ é holomorfa. Note que X é regular e $z = u+iv$ são parâmetros isotérmicos (ou seja $E \neq 0$), sse $\sum |\Phi_j|^2 \neq 0$ e $z = u + iv$ são parâmetros isotérmicos. Note que

$$X(z) = \Re \int_{z_0}^{z} \Phi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

Note que se X não é *plana* então $\Phi_1 \not\equiv i\Phi_2$, e $\Phi_3 \not\equiv 0$. Neste caso, existe uma função holomorfa $2f := \Phi_1 - i\Phi_2$ em U e uma função meromorfa $g := \dfrac{\Phi_3}{\Phi_1 - i\Phi_2}$, de maneira que podemos escrever (fazendo um abuso de notação) a *representação de Weierstrass*

$$X(z) = \Re \int_{z_0}^{z} \big((1-g^2)f\,\mathrm{d}z, i(1+g^2)f\,\mathrm{d}z, 2gf\,\mathrm{d}z\big)$$

Note que a superfície será regular sse f se anula *apenas* nos pólos de g e a ordem de cada zero nestes pontos é exatamente o dobro da ordem do pólo de g. Note que a métrica é dada por

$$\mathrm{d}s^2 = \big(|f|(1+|g|^2)\big)^2\,|\,\mathrm{d}z|^2$$

Note que a segunda forma fundamental II é dada por

$$II = -2\Re(f\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}g)$$

A finalidade deste exercício é mostrar que g é exatamente a composta da aplicação normal de Gauss com a projeção estereográfica do *pólo norte*, que tem que ser conforme, sse S é mínima (por quê ?). Note que

$$X_u \times X_v = \big(\Im(\overline{\Phi_3}\Phi_2), \Im(\overline{\Phi_1}\Phi_3), \Im(\overline{\Phi_2}\Phi_1)\big)$$

Conclua

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \left(\frac{2\Re g}{1+|g|^2}, \frac{2\Im g}{1+|g|^2}, \frac{1-|g|^2}{1+|g|^2}\right)$$

Infira daí o desejado. Note que a curvatura de Gauss K de uma superfície mínima pode ser expressa em termos de f, g

$$K = -\left(\frac{2|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2}\right)^2$$

Vamos neste item re-obter superfícies mínimas clássicas via a representação de Weierstrass Note que o catenóide pode ser obtido fazendo $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $g(z) = z, f(z)\,\mathrm{d}z = \dfrac{\mathrm{d}z}{z^2}$. Note que o helicóide pode ser obtido fazendo $U = \mathbb{C}, g(z) = \mathrm{e}^z$, $f(z)\,\mathrm{d}z = i\,\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z$. Note que Enneper pode ser obtida fazendo $U = \mathbb{C}, g(z) = z$, $f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}z$. Nota: O catenóide é a única superfície mínima de revolução . O catenóide e a superfície de Enneper são as únicas superfícies mínimas completas de curvatura total -4π. Se uma superfície mínima S mergulhada e completa tem curvatura total finita e gênero zero, então S tem que ser o plano ou o catenóide (*Teorema de Lopez-Ros*). Se uma superfície mínima S mergulhada e completa tem curvatura total finita e dois fins, então S tem que ser o catenóide (*Teorema de R. Schoen*): A hipótese de curvatura total finita pode ser relaxada e substituída pela hipótese bem mais fraca de *topologia finita* (*Teorema de P. Collin*). Obtenha a representação de Weierstrass da família catenóide-helicóide de superfícies mínimas associadas, localmente isométricas, ao catenóide (helicóide). Vamos ver outros exemplos de superfícies mínimas A superfície de Scherk é dada implicitamente por

$$\mathrm{e}^z = \frac{\cos y}{\cos x}$$

Estude o seu gráfico. Nota: Scherk foi obtida pelo método de separação das variáveis. Considere $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}, g(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}, f(z)\,\mathrm{d}z = \dfrac{\mathrm{d}z}{z^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}$. Calcule Φ_1, Φ_2, Φ_3. Note que a condição de zeros e pólos de f, g estão satisfeitas. Para que a imersão esteja bem definida é necessário verificar as *condições de período*: Basta considerar uma curva de Jordan em torno de 0 e calcular os resíduos de Φ_1, Φ_2, Φ_3 na singularidade 0, e mostrar que parte real do resíduo é real. Conclua que $(g, f\,\mathrm{d}z)$ define uma imersão conforme mínima de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ em $\mathbb{R}^3$. Note que a imersão é completa e de curvatura total $-\infty$. *Sugestão* : Para mostrar o último ponto você terá que usar o grande teorema de Picard. Encontre você mesmo, via Weierstrass, várias superfícies mínimas completas em $\mathbb{R}^3$. Vamos fazer agora algumas perguntas sobre superfícies de curvatura média constante de $\mathbb{R}^3$. Note que uma superfície de curvatura média constante (não nula) de $\mathbb{R}^3$ é sempre orientável. É sabido que uma gráfico com bordo planar de curvatura média constante H tem altura máxima $1/|H|$, estimativa esta realizada pelo hemisfério de raio $R = 1/|H|$. Note que se S é uma superfície conexa mergulhada com $H =$ constante, de modo que $S \cap \{z = 0\} = \partial S$ (S está de uma do plano-xy) então a distância máxima de S ao plano-xy é $2/|H|$. Sugestão : Aplique o princípio do máximo e o princípio de reflexão de Alexandrov de forma conveniente. Note que se S é uma superfície de curvatura média constante (não nula), com bordo uma curva γ plana simples fechada, então a configuração $S \cap \mathrm{Int}(\gamma) \neq \emptyset$ e $S \cap \mathrm{Ext}(\gamma) = \emptyset$ é impossível. *Sugestão* : Aplique a *fórmula do fluxo* dada em sala de aula, convenientemente. Note que se uma superfície com $H = \mathrm{cst} \neq 0$ propriamente mergulhada e completa em $\mathbb{R}^3$ tem dois fins tipo anel convergindo para dois cilindros então os cilindros têm que ser paralelos.

* * *

Estudo introdutório de Geometria Hiperbólica e de Geometria Riemanniana

Em seguida serão colocadas questões de geometria hiperbólica e geometria Riemanniana. Agora completaremos nosso são absolutamente necessárias para o entendimento da geometria hiperbólica, particularmente da teoria das superfícies (hipersuperfícies) do espaço hiperbólico. Certos conceitos e resultados vistos, ou abordados de alguma forma, em dimensão 3 serão examinados em dimensões arbitrárias já que a extensão é um processo intelectual trivial.

Seja $f : M \to \overline{M}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M de dimensão n em uma variedade riemanniana $\overline{M}$ de dimensão $n+k$. Suponha que M tem a métrica riemanniana induzida por f. Seja $p \in M$ e $U \subset M$ uma vizinhança de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ seja uma subvariedade de $\overline{M}$. Sejam X, Y campos de vetotes em $f(U)$ e estenda-os a campos de vetores $\overline{X}, \overline{Y}$ em um aberto de $\overline{M}$. Defina $(\nabla_X Y)(p) =$ componente tangencial de $\overline{\nabla}_{\bar{X}}\overline{Y}(p)$, onde $\overline{\nabla}$ é a conexão riemanniana de $\overline{M}$. Note que ∇ é a conexão riemanniana de M. Note que existe uma vizinhança $U \subset M$ de p e $n+1$ campos de vetores $e_1, \ldots, e_{n+1}$ ao longo de U, ortornormais em cada ponto de U, tais que em p, $\overline{\nabla}_{e_i} e_j(p) = 0$. Uma tal família $e_i, i = i, \ldots, n+1$ de campos de vetores é chamada um *referencial local geodésico* em p (Veja refs). Calcule o gradiente de uma função real suave g em M, a divergência de um campo suave Y em M, e o Laplaciano de uma função real suave g em M, *num ponto p*, usando o referencial geodésico determinado no item b).

Considere a esfera unitária $\mathbb{S}^n$ em $\Re^{n+1}$ centrada na origem

Exiba a conexão Riemanniana de $\mathbb{S}^n$. Dê um argumento intuitivo de que a curvatura seccional da esfera é 1. Note que os círculos máximos de raio 1 são as únicas geodésicas de $\mathbb{S}^n$. Note, por um exemplo que o transporte paralelo, em geral, depende apenas da curva que liga estes dois pontos. *Sugestão*: Considere o cone C tangente a $\mathbb{S}^2$ ao longo de um paralelo qualquer c de $\mathbb{S}^2$. Note que o transporte paralelo de um vetor tangente V_0 a $\mathbb{S}^2$ em um ponto de c é o mesmo quer tomado em relação a $\mathbb{S}^2$ ou a C. Note que todas as curvas de curvatura constante em $\mathbb{S}^2$

são círculos de $\mathbb{S}^2$. Note que a curvatura *em* $\mathbb{S}^2$ é dada por $r^2 = \dfrac{1}{k^2+1}$, onde r é o raio do círculo.

Considere o espaço de Lorentz $\mathcal{L}^{n+2} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ munido da métrica pseudo-riemanniana $\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}x_0^2 + \mathrm{d}x_1^2 + \cdots + \mathrm{d}x_{n+1}^2$. Note que existe uma única conexão afim em $\mathcal{L}$ (i.e satisfazendo as propriedades de linearidade e produto) que é *compatível* com a métrica pseudo-riemanniana de $\mathcal{L}$ e que é *simétrica.* Calcule os *símbolos de Christoffel* desta métrica pseudo-riemanniana. Considere o modelo de Minkowski $\mathcal{H}^3$ do espaço hiperbólico definido por $\mathcal{H}^3 := \{(t,x,y,z),\ -t^2+x^2+y^2+z^2 = -1,\ t,x,y,z \in \mathbb{R}\}$ munido da métrica de Lorentz $\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$. Note que a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{H}$, dada por

$f(x,y,z) = \left(\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}, x, y, z\right)$ determine uma orientação natural em $\mathcal{H}$ proveniente da orientação natural de $\mathbb{R}^3$. Seja M uma superfície de Riemann e sejam $z = u + iv$ coordenadas isotérmicas em M. Seja $X : M \to \mathcal{H}^3$ uma imersão conforme suave cujo vetor curvatura média está denotado por $\overrightarrow{H}$. Assuma $\overrightarrow{H} \neq 0$. Então podemos assumir que $\{X, X_u, X_v, \overrightarrow{H}\}$ em z é uma base positiva de $\mathcal{L}^4$, para cada $z \in M$. Logo, com nossa convenção sobre X, Note que $\{X_u, X_v, \overrightarrow{H}\}$ é uma base positiva de $\mathcal{H}^3$. Considere B^3 o modelo da bola do espaço hiperbólico. Note que a aplicação (*projeção estereográfica*) $F : \mathcal{H}^3 \to B^3$, dada por

$$F(t,x,y,z) = \left(\frac{x+iy}{1+t}, \frac{z}{1+t}\right)$$

é uma isometria global que preserva orientações . Interprete geometricamente esta aplicação . Calcule a inversa . Seja $O^+(1,3)$ o grupo de isometrias de $\mathcal{H}^3$. Considere o conjunto de matrizes

$$A(s) = \begin{pmatrix} \cosh s & \sinh s & 0 & 0 \\ \sinh s & \cosh s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que $\{A(s),\ s \in \mathbb{R}\}$ é um sub-grupo à um parâmetro de isometrias de $\mathcal{H}$; i. e $\{A(s)\} \subset O^+(1,3)$. Dê uma interpretação geométrica. Qual é o resultado da ação de um elemento qualquer $A(-s)$ no ponto $(\cosh s, \sinh s e_1)$, onde $e_1 = (0,1,0,0)$? Daí deduza a existência de um sub-grupo de isometrias que age transitivamente em $\mathcal{H}$ (Faça desenhos !!). Seja $X \in \mathcal{H}^{n+1}$ e seja $v \in T_X\mathcal{H}^{n+1}$, onde $\mathcal{H}^{n+1}$ ó modelo de Minkowski do espaço hiperbólico. Note que a geodésica única que passa por X tangente ao vetor unitário v é dada por $\gamma(t) = \cosh tX + \sinh tv$. Interprete geometricamente as geodésicas neste modelo, mostrando que estas são as interseções de $\mathcal{H}^{n+1}$ com planos de $\mathbb{R}^{n+2}$ que passam pela origem dadas pela equação acima. Classifique as superfícies totalmentes geodésicas, no caso $n+1=3$, mostrando que são interseções de $\mathcal{H}^3$ com sub-espaços de dimensão 3 de $\mathbb{R}^4$.

Suponha que um campo X em uma variedade riemanniana $\overline{M}$ satisfaz $X(p) \neq 0,\ p \in \overline{M}$. Estude o teorema do fluxo e do grupo local 1-parametro da teoria das EDO e note que existe um sistema de coordenadas $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ numa vizinhança U de p tal que $\dfrac{\partial}{\partial t} = X$. Note que a forma volume ν se escreve numa vizinhança de p como $\nu = \sqrt{g}\, dt \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Determine $\sqrt{g}$. Com as notações acima, levando em conta a expressão local obtida em sala de aula, conclua que $\operatorname{div} X = \dfrac{1}{\sqrt{g}} \dfrac{\partial}{\partial t}\sqrt{g}$,

ou seja $\operatorname{div} X$ “mede intuitivamente o grau de variação do volume de $\overline{M}$ ao longo das trajetórias de X”. Note também que

$$d\,(\imath_X \nu) = \operatorname{div} X \nu,$$

onde $\imath$ é o produto interior de das *formas diferenciáveis* que leva uma $k+1$-forma numa k-forma (veja refs). Enuncie o teorema da divergência para variedades Riemannianas, numa situação bem geral . Note que a primeira identidade de Green (Veja na ref).

Seja $\overline{M}$ uma variedade riemanniana e seja $\bar{\triangle} : \mathcal{D}(\bar{M}) \to \mathcal{D}(\bar{M})$ o operador Laplaciano. Note que dada $f : \overline{M} \to \mathbb{R}$ suave, o valor de $\overline{\triangle}$ em f é dado por $\overline{\triangle} f = \mathrm{traçoHess\ f}$, onde $\mathrm{Hess\,f} : \mathrm{T_p\overline{M}} \to \mathrm{T_p\overline{M}}$ é o operador definido por $(\mathrm{Hess\,f})\,(Y) = \overline{\nabla}_Y(\nabla f)$, $Y \in T_p\overline{M}$.

Além disto se $M = f^{-1}(a)$, onde a é um valor regular de f, note que Hessf restrito a TM é auto-adjunto. A curvatura média H de M, a menos de sinal, é dada por $nH = \operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}\right)$. Se $g \in \mathcal{D}(\bar{M})$ note que $\triangle(fg) = f\,\triangle g + g\,\triangle f + 2 < \nabla f, \nabla g >$. Se $\overline{M} = \{X \in \mathbb{R}^{n+1}; |X| < 1\}$ é bola unitária munida da métrica (hiperbólica) $ds^2 = \dfrac{|dX|^2}{(1-|X|^2)^2}$, note que

$$\overline{\triangle} = (1-r^2)^2 \left(\sum_{i=1}^{n+1} a \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + b \frac{(n-1)}{1-r^2} \frac{r\partial}{\partial r} \right),$$

para constantes a, b; onde $r = |X|$. Calcule a e b. Considere $\mathcal{H}^{n+1}$ o modelo de Minkowski do espaço hiperbólico (Veja item acima). Seja p um inteiro positivo menor que $n+1$ Considere $\widetilde{f}$ definida em $\mathcal{L}$ por

$$\widetilde{f}(X) = -x_0^2 - \cdots - x_{p-1}^2 + x_p^2 + x_{p+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^2$$

Seja f a função suave definida em $\mathcal{H}$ por $f = \widetilde{f}\mid_{\mathcal{H}^{n+1}}$. Note que $\|\nabla f\|^2 = -4 + 4f^2$. *Sugestão* : Lembre-se que $X = (x_0, \ldots, x_n, x_{n+1})$ é normal à $\mathcal{H}^{n+1}$ em $\mathcal{L}$. Note que
$\nabla \widetilde{f} = \nabla f - 2fX$, e que $\nabla \widetilde{f}(X) = 2(-x_0, \ldots, -x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n, -x_{n+1})$.
Este é um exemplo de *função transnormal* obtido por Marcos Alexandrino na sua dissertação de Mestrado (Veja ref). Note que

$$\triangle f = (2n+4)f + 2(n-2p)$$

Isto, junto com o resultado do item i), implica que f é uma função isoparamétrica (Veja ref). *Sugestão* : Note que

$$\overline{\nabla}_Y \nabla \widetilde{f} = 2(-y_0, \ldots, -y_{p-1}, y_p, y_{p+1}, \ldots, y_n, -y_{n+1})$$

Conclua que $\overline{\nabla}_X \nabla \widetilde{f} = \nabla \widetilde{f}$. Logo,infira que $< \overline{\nabla}_X \nabla \widetilde{f}, X >= 2f$. Deduza também que $\triangle \widetilde{f} = 2(n-2p)$. Em seguida, tome um referencial em $X \in \mathcal{H}^{n+1}$, $\{e_0, \ldots, e_n, X\}$, tal que $\{e_0, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortornormal de $\mathcal{H}^{n+1}$, para fazer os cálculos. Considere c um valor regular de f de maneira que $f^{-1}(c)$ é uma *folha regular*. Note que o espaço tangente $T_X f^{-1}(c)$, é gerado pelos subespaços ($v \in T_X f^{-1}(c)$)

$$W_1 := \{(0, \ldots, v_p, \ldots, v_n, 0); v_p x_p + \cdots + v_n x_n = 0\}$$

$$W_2 := \{(v_0, \ldots, v_{p-1}, 0, \cdots, 0, v_{n+1}); v_0 x_0 + \cdots + v_{p-1} x_{p-1} - v_{n+1} x_{n+1} = 0\}$$

Note que, com a orientação determinada pelo gradiente de f, $f^{-1}(c)$ é um *cilindro* em $\mathcal{H}^{n+1}$ com curvaturas principais iguais a $-\dfrac{1+c}{\sqrt{-1+c^2}}$ (multiplicidade $n-p$) e $\dfrac{-1+c}{\sqrt{-1+c^2}}$ (multiplicidade p) *Sugestão* : Use o fato que $N = \dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ é o campo normal unitário no sentido do gradiente e que $\|\nabla f\|$ é constante em $f^{-1}(c)$. Note que

$$\nabla_Y \nabla f = \overline{\nabla}_Y \nabla f + < \overline{\nabla}_Y \nabla f, X > X$$

Use que

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_Y \nabla f &= \overline{\nabla}_Y \nabla \widetilde{f} + \overline{\nabla}_Y 2fX \\ &= 2(-y_0, \dots, -y_{p-1}, y_p, y_{p+1}, \dots, y_n, -y_{n+1}) + 2fY + 2 < \nabla \widetilde{f}, Y > X\end{aligned}$$

Em seguida considere $Y = w_1 + w_2$, com $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$, para deduzir que

$$\nabla_{w_1} \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{(2+2f)w_1}{2\sqrt{-1+f^2}}$$

$$\nabla_{w_2} \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{(-2+2f)w_2}{2\sqrt{-1+f^2}}$$

Logo, $-\dfrac{1+c}{\sqrt{-1+c^2}}$ e $\dfrac{-1+c}{\sqrt{-1+c^2}}$ são a únicas curvaturas principais de $f^{-1}(c)$, contadas com multiplicidades. O resultado segue do seguinte teorema de Cartan (Veja ref)

Diz-se que uma hipersuperfície é *isoparamétrica* se suas curvaturas principais são constantes.

Teorema de Cartan (Classificação das hipersuperfícies isoparamétricas com duas curvaturas principais distintas num *espaço forma*). *Seja K uma superfície isoparamétrica com curvaturas principais distintas k_1 e k_2 de multiplicidades n_1 e n_2 num $\mathrm{M}^{n+1}(c)$ espaço de curvatura seccional constante c ($M = \mathbb{R}^{n+1}$, se $c = 0$, $M = \mathbb{H}^{n+1}$, se $c = -1$ e $M = \mathbb{S}^{n+1}$, se $c = 1$.). Então , segue que K é um cilindro em $\mathrm{M}^{n+1}(c)$. Em particular, tem-se que para $c = 1$, que K é um mergulho de $\mathbb{S}^{n_1}(\frac{1}{\sqrt{k_1^2+1}}) \times \mathbb{S}^{n_2}(\frac{1}{\sqrt{k_2^2+1}})$ em $\mathbb{S}^{n+1}$.*

É interessante comparar o resultado acima com o de Nomizu que utilizou a famosa identidade de Cartan para demonstrar o seguinte (Veja ref):

Teorema de Nomizu *Seja K uma hipersuperfície isoparamétrica mergulhada em $\mathrm{M}^{n+1}(c)$ com k curvaturas principais λ_i distintas. Então ,* *para $c = 0$, k é no máximo igual a 2 e se K possuir duas curvaturas distintas então uma delas é nula. Para $c = -1$, k também é no máximo igual a 2 e se K possuir duas curvaturas distintas k_1 e k_2 então $k_1 k_2 = 1$.*

Combinando os dois resultados acima obtém-se que:

As hipersuperfícies isoparamétricas de $\mathbb{R}^{n+1}$ e de $\mathbb{H}^{n+1}$ são os cilindros e as hipersuperfícies totalmente umbílicas.

Note que as multiplicidades das m curvaturas principais distintas k_i de uma hipersuperfície isoparamétrica K são constantes. *Sugestão* : Considere $k_1, \ldots, k_{m_1}, k_m, \ldots, n$ as curvaturas principais de K de modo que $k_i \neq 0,\ i < m$. Defina $\nu = m$ se todas as curvaturas principais são distintas de zero e $\nu = m-1$ se $k_m = 0$. Considere $n_i(x)$ a multiplicidade de k_i em $x \in K$. defina os polinômios

$$p_j(x) := \sum i = 1_i^n(x) k_i^j = \text{traço} A^j$$

onde A é o operador de Weingarten. Observe que $p_j(x)$ são funções constantes (Por quê ?). Note que $n_i(x)$ são constantes.

O seguinte teorema de caracterização das hipersuperfícies isoparamétricas é devido a Nomizu (Veja ref)

Seja K uma hipersuperfície mergulhada em $\mathrm{M}^{n+1}(c)$ e seja $\varphi_t : K \to \mathrm{M}^{n+1}(c)$, definida por $\varphi_t(x) = \exp_x(tN)$ e $K_t = \varphi_t(K)$. Se para qualquer t, K_t tem curvatura média constante H_t, então K_t é isoparamétrica.

Nota: No que segue imediatamente, seguiremos o texto da dissertação de mestrado de Marcos Alexandrino (Veja ref). Seja K uma hipersuperfície mergulhada em uma variedade Riemanniana completa M, com conexão ∇. Seja $\gamma(t)$ uma geodésica de M parametrizada pelo comprimento de arco t, tal que $\gamma(0) \in K$ e $\gamma'(0) \in T^{\perp}_{\gamma(0)} K$. Assuma que existe um campo de vetores unitário normal N; tal que $N(\gamma(0)) = \gamma'(0)$. Considere $\alpha(s)$ uma curva suave, contida em K tal que $\alpha(0) = \gamma(0)$ e $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, r] \to M$, uma variação de $\gamma(t)$, definida como $f(s,t) = \exp_{\alpha(s)} (tN(\alpha(s)))$. Note que

$$< \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} >_{f(s,t)} = 0$$

Sugestão : Use a simetria da conexão e o fato que as curvas $s =$ const são geodésicas. Faça um resumo sobre o conceito de *campo de Jacobi* (Veja refs). Diz-se que um campo de Jacobi $J(t)$, definido ao longo da geodésica $\gamma(t)$ é um K-campo de Jacobi, sse satisfaz às seguintes condições : $< J(t), \gamma'(t) >= 0$. $J'(0) + A(\gamma'(0))J(0) = 0$, onde A denota a aplicação de Weingarten. Sejam $\alpha(s)$ uma curva em K com $\alpha(0) =$

$\gamma(0), f(s,t) = \exp_{\alpha(s)}(tN(\alpha(s)))$ e $J(t) = \dfrac{\partial f(0,t)}{\partial s}$. Note que $J(t)$ é um K-campo de Jacobi ao longo de $\gamma(t)$. *Sugestão* : Note que como $f(s,t)$ é uma variação por geodésicas então $J(t)$ é um campo de Jacobi (Veja ref). Note isto!! Note que $*$) garante o item a) da definição de K-campo de Jacobi. Finalmente note que

$$\begin{aligned} J'(0) &= \frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f(0,0)}{\partial s} \\ &= \frac{D}{\mathrm{d}s}\frac{\partial f(0,0)}{\partial t} \\ &= \nabla_{J(0)}\frac{\partial f(s,0)}{\partial t} \\ &= -A(\gamma'(0))J(0) \end{aligned}$$

Note que se $J(t)$ é um K-campo de Jacobi ao longo de $\gamma(t)$, então existe uma curva $\alpha(s)$ em K tal que fazendo $f(s,t) = \exp_{\alpha(s)}(tN(\alpha(s)))$, $J(t) = \dfrac{\partial f(0,t)}{\partial s}$.*Sugestão* : Considere $\alpha(s)$ uma curva em K tal que $\alpha'(0) = J(0)$ e considere $\widetilde{J}(t) = \dfrac{\partial f(0,t)}{\partial s}$. Note que $\widetilde{J}(t)$ é um K-campo de Jacobi e note que $\widetilde{J}(0) = J(0)$. Use o item b) da definição de K-campo de Jacobi. Define-se um ponto $\gamma(r)$ de *ponto focal* de K se existe um K-campo de Jacobi $J(t)$ ao longo de $\gamma(t)$, não identicamente nulo, tal que $J(r) = 0$. Um corolário disto e do que precede é o seguinte: *Seja $\varphi_r : V \to M$ definida por $\varphi_r(x) = \exp_x(rN(x))$. Então $\gamma(r)$ é um ponto focal com multiplicidade k, sse $\gamma(r)$ é valor crítico de φ_r, sendo k a dimensão do núcleo de $d\varphi(\gamma(0))$.* O *lema do índice de Morse adaptado*, diz respeito ao índice de uma certa forma quadrática Q_a definida no conjunto de campos diferenciáveis por partes definidos em $\gamma\,\big|_{[0,a]}$, ortogonais à $\gamma'(t)$ e que se anulam em $t = a$. Diz que o *índice* de Q_a é finito e igual ao número de pontos focais de K, contados com suas multiplicidades, ao longo de $\gamma(t)$ para $0 < t < a$ (Veja ref).

Considere agora duas hipersuperfícies K e G mergulhadas em uma variedade Riemanniana M de dimensão $n+1$. Assuma que exista um campo unitário N de vetores normais à K. Diz-se que K e G são *paralelas* se existe s tal que a aplicação $\varphi_s(x) := \exp_x(sN(x))$ definida em K seja um difeomorfismo entre K e G. Note que se $p \in K, \gamma(t) = \exp_p(tN(p))$

e $J(t)$ é um K-campo de Jacobi ao longo de $\gamma(t)$, então $J(t+s)$ é um G-campo de Jacobi. Assuma que $K_t := \varphi_t(K)$ são hipersuperfícies. Dado um ponto $y = \varphi_{t_0}(x)$ de K_{t_0} define-se $N(y) := \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t(x) \big|_{t=t_0}$. Cada K_t admite uma orientação natural determinada por N. Assuma a existência de uma função suave $f : M \to \mathbb{R}$ tal que f restrita à cada K_t seja constante. Seja $\widetilde{f}(t) := f(K_t)$. Note que

$$\triangle f(p) = \widetilde{f}''(t_0) - n\widetilde{f}'(t_0)H(p) \qquad p \in K_{t_0}$$

Sugestão : Observe que $\nabla f(y) = \widetilde{f}'(t)N$, e que $\nabla_N N(y) = 0$, $y \in K_t$. Considere $\{e_1, \ldots, e_n\}$ referencial local ortornormal em uma vizinhança de p em M tal que em p $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é tangente às direções principais.

Conclua Sejam K_t e f definidos acima. Note que se $\triangle f$ é constante em cada K_t então K_t é uma hipersuperfície de curvatura média constante. Nota (ainda seguindo Marcos Alexandrino, ref): Suponha que $M = \mathrm{M}^{n+1}(c)$ uma variedade de curvatura seccional constante c . Assuma que $K_t = \varphi_t(K)$, sejam hipersuperfícies mergulhadas, e portanto paralelas à K. Seja $p \in K, \gamma(t) = \varphi_t(p)$ e seja $\{e_i\}$ uma base ortornormal de direções principais de p associadas às curvaturas principais k_i. A finalidade da presente discussão é determinar as curvaturas principais e as direções principais de K_t em $\gamma(t)$: Tome $\{J_i(t)\}$, n K-campos de Jacobi ao longo de $\gamma(t)$ com $J_i(0) = e_i$. (Veja o item $***$) acima). O fato de que $J_i''(t) + cJ_i(t) = 0$ (Por quê ?), a definição de um K-campo de Jacobi e a unicidade de campos de Jacobi garantem que :

$$J_i(t) = g_i(t)e_i(t)$$

onde $e_i(t)$ é o transporte paralelo de e_i ao longo de $\gamma(t)$ e $g_i(t)$ é uma função suave que satisfaz às seguintes equações

$$g_i''(t) + cg_i(t) = 0$$

$$g_i'(0) + k_i g_i(0) = 0$$

Logo, se $c = 0, g_i(t) = -k_i t + 1$, se $c = -1, g_i(t) = -k_i \sinh t + \cosh t$, se $c = 1, g_i(t) = -k_i \sin t + \cos t$. Note que, nas condições acima, $\{e_i(t)\}$ é uma base ortornormal de direções principais de K_t em $\gamma(t)$ associadas às curvaturas principais $-\dfrac{g_i'(t)}{g_i}$. Calcule as curvaturas principais em cada caso $c = 0, 1, -1$.

Sugestão : Veja item a) acima.

(*Classificação das superfícies totalmente umbílicas* de $\mathrm{M}^{n+1}(c)$) Agora considere K uma hipersuperfície totalmente umbílica completa (conexa) com curvatura principal k de um espaço de formas espaciais $\mathrm{M}^{n+1}(c)$. Seja $p \in K$. Dado $v \in T_pK$ define-se Σ_v como sendo o hiperplano totalmente geodésico que contém p tal que $v \in (T_p\Sigma_v)^{\perp}$. Note que existe uma vizinhança V de p em M^{n+1} tal que $K_v := V \cap K \cap \Sigma_v$, é uma hipersuperfície umbílica de Σ_v, para todo $v \in T_pK$, com curvatura principal k. *Sugestão* : Considere para fixado $v \in T_pK$, um campo unitário η de $T(\Sigma_v)^{\perp}$. Note que para todo $X \in T(\Sigma_v)$ tem-se que $\overline{\nabla}_X\eta \equiv 0$. Seja $\alpha(t)$ uma curva parametrizada regular com $\alpha(0) = p$ com $\alpha(t) \in K \cap \Sigma_v$. Seja $\alpha(r) = q$. Note que o normal unitário $N(q) \in T_q\Sigma_v$, para todo $q \in K_v$; mostrando que $< N(\alpha(t)), \eta(\alpha(t)) >\equiv 0$. Finalmente, conclua disto, da definição de hipersuperfície umbílica e do fato que $< \overline{\nabla}_XY, N >= k < X, Y >$, para quaisquer $X, Y \in T_qK$, que K_v é umbílica em Σ_v, como desejado

Seja K uma hipersuperfície (conexa) completa com curvatura principal k em $\mathrm{M}^{n+1}(c)$. Note que se $c = 0, 1$ K é uma hipersuperfície totalmente geodésica ou uma esfera geodésica de $\mathrm{M}^{n+1}(c)$. Se $c = -1$ note que K, visto no modelo do semi-espaço $\mathbb{H}^{n+1}$, é a interseção de $\mathbb{H}^{n+1}$ com um hiperplano ou uma esfera de dimensão n de $\mathbb{R}^{n+1}$. Quando $k > 1$ note que K é uma esfera geodésica de $\mathbb{H}^{n+1}$.*Sugestão* : Note que basta demonstrar o teorema localmente. Em seguida note que se o teorema for verdadeiro para $n = j$ então o resultado no item a) mostra que este será verdadeiro para $n = j+1$. Note que o teorema está confirmado para $n = 2$, pela classificação das curvas de curvatura constante.

Seja f uma função suave em uma variedade riemanniana $\overline{M}$ de dimensão $n+1$ e seja M uma subvariedade de $\overline{M}$ de dimensão k. Sejam $\overline{\nabla}$ e $\overline{\triangle}$ a conexão e o Laplaciano sobre $\overline{M}$, respectivamente. Seja $\triangle$ o laplaciano sobre M. Finalmente, seja $\vec{H}$ o vetor curvatura média de M definido pela equação

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{\nabla}_{\bar{e}_i}\bar{e}_i = k\,\overrightarrow{H} + \sum_{i=1}^{k} \nabla_{e_i}e_i,$$

onde $e_1, \ldots, e_k$ é um campo de vetores ortornormais numa vizinhança de um ponto p de M e $\bar{e_1}, \ldots, \bar{e_{n+1}}$ é uma extensão ortornormal suave destes campos à uma vizinhança de p em $\overline{M}$. Note que $\triangle f = \sum_{i=1}^{k} (e_i\, e_i f - \nabla_{e_i}e_i f)$

Note que $< \nabla f, \nabla_{e_i} e_i >= \nabla_{e_i} e_i f$. Interprete o termo da direita da igualdade. Note que $\triangle f = \overline{\triangle} f + k\vec{H} f - \sum_{j=k+1}^{n+1} (\bar{e_j}\bar{e_j} f - \overline{\nabla}_{\bar{e_j}} \bar{e_j} f)$ Suponha que M é imagem inversa de um valor regular de f e que as trajetórias do gradiente que partem de $p \in M$ são geodésicas. Interprete e expresse a fórmula do item anterior neste caso .

Note o seguinte teorema devido a E. Hopf: Seja M uma variedade Riemanniana orientável compacta (sem bordo) e conexa. Seja f uma função suave em M com $\triangle f \geqslant 0$. Note que $f =$ const. *Sugestão*: Aplique o teorema da divergência duas vezes, primeiramente a $\triangle f$, em seguida a $\triangle f^2$. Ou ainda aplique diretamente o princípio do máximo. Seja $X : M \to \bar{M}$ uma imersão isométrica de uma variedade compacta (sem bordo) M de dimensão n em uma variedade $\bar{M}$ de dimensão $n+1$. Sejam f, g funções suaves e Y um campo suave em M. Note que $\operatorname{div} f \cdot Y = f \cdot \operatorname{div} Y + \langle \nabla f, Y \rangle$, onde ∇ é o gradiente sobre M e div é a divergência sobre M.

Note que $\triangle(f \cdot g) = f \cdot \triangle g + g \cdot \triangle f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$, onde $\triangle$ é o Laplaciano sobre M.

Note que

$$\int_M (f \triangle g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle) \, \mathrm{d}M = 0$$

se $\bar{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ então deduza a fórmula de Minkowski

$$\int_M (1 + H(\langle X, N \rangle) \, \mathrm{d}M = 0$$

onde N é um campo de vetores normal unitário a M e H é a curvatura média calculada com respeito a N.

Seja $\overline{M}(c)$ uma variedade Riemanniana orientável simplesmente conexa de dimensão $n + 1$ com curvatura seccional constante c. Seja $X : M \to \overline{M}(c)$ uma imersão isométrica. Seja A o operador de Weingarten associado à um normal global N. Sejam $k_1, \ldots, k_n$ as curvaturas principais da imersão (que são exatamente os auto-valores de A). As funções simétricas de curvatura associadas à A, podem ser definidas usando o polinômio característico de A por

$$\det(tI - A) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \, S_r t^{n-r}$$

As transformações de Newton P_r são definidas indutivamente por

$$P_0 = I$$
$$P_r = S_r I - A \cdot P_{r-1}$$

Seja $e_1, \ldots, e_n$ uma base ortornormal de autovetores de A correspondendo, respectivamente, aos auto-valores $k_1, \ldots, k_n$. Representaremos por A_i a restrição da transformação A ao sudespaço normal à e_i e por $S_r(A_i)$ a r- ésima função simétrica associada à A_i.. Definamos $S_{n+1} = 0$.

Note as seguintes igualdades: Para cada $1 \leqslant r \leqslant n-1$, vale

$P_r(e_i) = S_r(A_i)e_i \quad \forall \ 1 \leqslant r \leqslant n$. traço$(P_r) = \sum_{i=1}^n S_r(A_i) = (n-r)S_r$

traço$(AP_r) = \sum_{i=1}^n k_i S_r(A_i) = (r+1)S_{r+1}$ traço$(A^2P_r) = \sum_{i=1}^n k_i^2 S_r(A_I) = s_1 s_{R+1} - (R+2)s_{R+2}$. Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave sobre M. Defina L_r o *operador linearizado de* S_{r+1} por

$$L_r f = \operatorname{div}(P_r \nabla f)$$

Note que

$$\int_M (f\, L_r g + \langle P_r \nabla f, \nabla g \rangle)\, \mathrm{d}M = 0$$

Suponha $c = 0, 1,$ ou -1. Interprete X como sendo o *o vetor posição* de M em $\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{S}^{n+1}$, ou $\mathbb{H}^{n+1}$. Definamos H_r pela equação $S_r := \binom{n}{i} H_r$. Note as seguintes fórmulas

$$\begin{aligned} L_r(X) &= -\big((r+1)S_{r+1}\big)N - c(n-r)S_r X \\ &= -c_0(r)\,(H_{r+1}N + c\,H_r X) \end{aligned}$$

Quando S_{r+1} é constante, note que

$$L_r N = -\big(S_1\, S_{r+1} - (r+2)\, S_{r+2}\big)N - c\,(r+1)\, S_{r+1} X$$

Suponha que M seja uma hipersuperfície fechada. Note as fórmulas de Minkowski em $\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{S}^{n+1}$, e $\mathbb{H}^{n+1}$

$$\int_M (H_{r+1}\; N + c\; H_r\; X)\, \mathrm{d}M = 0$$

Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um gráfico de uma função suave $x_{n+1} = u(x_1, \ldots, x_n)$ sobre um domínio Ω de $\mathbb{R}^n$. Considere a parametrização natural

$X : \Omega \to M$ dada por $X(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n))$. Seja $X_1, \ldots, X_n$ o referencial adaptado (global) a X. Seja (g_{ij}) a matriz da primeira forma fundamental associada a X. Sejam ∇ o gradiente e $\triangle$ o Laplaciano sobre M. Seja $H = H(x_1, \ldots, x_n, u)$ a curvatura média de M calculada com respeito ao normal unitário N que aponta para "cima", i.e para o sentido dos x_{n+1} crescente. Note que $g_{ij} = \delta_{ij} + u_i u_j$, $g = \det g_{ij} = W(u)^2 := 1 + |Du|^2$ e $N = (v_1, \ldots, v_{n+1})$, onde u_i denota diferenciação com respeito a x_i e $v_i = \dfrac{-u_i}{W(u)}, i < n+1$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{W(u)}$. Além disto, $g^{ij} = \delta^{ij} - v_i v_j$.

Se $\psi : M \to \mathbb{R}$ é suave, então (omitindo o símbolo do somatório, seguindo a convenção usual)

$$\triangle \psi = g^{ij} D_i D_j \psi + W(u)^{-1} D_i (W(u) g^{ij}) D_j \psi$$

onde D_i significa diferenciação com respeito a x_i. Conclua que

$$\triangle \psi = g^{ij} D_i D_j \psi + nH v_j D_j \psi \quad \text{e daí } \triangle u = \frac{nH}{W(u)}.$$

Também verifique que

$$\begin{aligned} \nabla H &= g^{ij} D_j H X_i \qquad \text{e daí} \\ \langle \nabla H, (0, \ldots, 1) \rangle &= g^{ij} D_j H u_i \\ &= g^{ij} \left(H_{x_j} + H_z u_j \right) u_i \\ &= H_z |\nabla u|^2 + g^{ij} u_i H_{x_j} \\ &= -v_{n+1} \left(v_i H_{x_i} - H_z |Du|^2 v_{n+1} \right) \end{aligned}$$

Seja v um vetor de $\mathbb{R}^{n+1}$. Então

$$\triangle \langle N, v \rangle = -2 \langle \nabla H, v \rangle - \|A\|^2 \langle N, v \rangle$$

onde $\|A\|^2$ é o quadrado da segunda forma fundamental de M, definido por $\|A\|^2 :=$ traço A^2. *Sugestão*: Use um referencial geodésico em $p \in M$. Conclua

$$\begin{aligned} \triangle v_{n+1} + \|A\|^2 v_{n+1} &= -2 \langle \nabla H, (0, \ldots, 1) \rangle \\ &= 2 v_{n+1} \left(v_j H_{x_j} - |Du|^2 v_{n+1} H_z \right) \end{aligned}$$

Elabore um resumo da fórmula da primeira e segunda variação da energia (Veja refs). Seja M uma variedade Riemanniana completa.

Seja $N \subset M$ uma subvariedade fechada. Seja $p \in M - N$. Note que existe uma geodésica minimizante $\gamma, \gamma(0) = p, \gamma(l) \in N$, de modo que $\operatorname{dist}(p, N) = \operatorname{dist}(\gamma) = l$. Além disto,$\gamma'(l) \perp N$. *Sugestões* (complete *todos* os detalhes !!): Seja $l = \operatorname{dist}(p, N)$. Note que o disco geodésico $\overline{B}_{l+1}(p)$, de centro P e raio $l + 1$ é compacto e que $K := \overline{B}_{l+1}(p) \cap N \neq \emptyset$. Note que $x \mapsto \operatorname{dist}(p, x)$ atinge um mínimo sobre K. $\Longrightarrow \exists q \in N; \operatorname{dist}(p, q) = l$. Seja γ uma geodésica minimizante ligando p a q (por que existe?). Seja $\beta(s)$ uma curva em N; $\beta(0) = q$. Seja $p_1 \in U \cap \gamma([0, l])$, onde U é uma vizinhança normal de q. Seja $\tilde{\beta} \subset T_{p_1}M$ definida por $\tilde{\beta}(s) = \exp_{p_1}^{-1}\big(\beta(s)\big)$. Claro que $\tilde{\beta}(s)$ está apenas definida para s suficientemente pequeno (por quê ?). Faça um desenho!!. Defina $f(s, t) = \exp_{p_1}\big(t \cdot \tilde{\beta}(s)\big), f(s, 0) = p_1, f(s, 1) = \beta(s)$. Sendo a geodésica γ_1, definida como sendo a restrição de γ ao arco entre p_1 e q, minimizante $\Longrightarrow \operatorname{dist}\big(f(s_0, t)\big) \geqslant \operatorname{dist}\big(f(0, t)\big) \forall s_0$, fazendo variar t de 0 a 1 (Por quê ?). Aplique a fórmula da primeira variação da energia para concluir o resultado (faça um desenho!!).

Seja M uma superfície completa de curvatura de Gauss estritamente positiva. Sejam γ_1, γ_2 duas geodédicas simples e fechadas de M. Note que $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$. *Sugestões* (complete *todos* os detalhes !!) : Caso contrário, $\exists$ geodésica γ; $\operatorname{dist}(\gamma_1, \gamma_2) = \operatorname{dist}(\gamma) = l$. Pelo resultado anterior $\gamma_1, \gamma_2 \perp \gamma$. Seja $V(0) = \gamma_1'(\gamma(0))$ e $V(t)$ o transporte paralelo de $V(0)$ ao longo de γ à $V(l) = \gamma(l) = q$. Considere $f(s, t) = \exp_{\gamma(t)}\big(s \cdot V(t)\big), \quad -\varepsilon < s < \varepsilon$. Note que $f(s, 0) = \gamma_1(s), f(s, l) = \gamma_2(s)$. Note que a fórmula da segunda variação, após algumas considerações e cálculos fica:

$$\frac{1}{2}\ddot{E}(0) = -\int_0^1 K \cdot l^2.$$

Conclua daí o resultado desejado.

Consideremos o modelo da bola tridimensional do espaço hiperbólico dado por $B = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \,|\, u^2 + v^2 + w^2 < 1\}$. Considere uma superfície de revolução gerada por uma curva c contida no disco aberto $D = \{(u, v, w)\} \in B \;\big|\; w = 0\}$. Seja $p \in D$, seja γ a unica geodésica passando por p e ortogonal à geodésica horizontal $\{v = 0\}$. Seja q a intersecção entre estas duas geodésicas. Então x é igual ‘a distância hiperbólica entre q e 0, e y é o comprimento orientado de γ entre p e q. Isto significa que $x \geqslant 0$ (resp. $y \geqslant 0$) $\Leftrightarrow u \geqslant 0$ (resp.$v \geqslant 0$), onde (u, v) são as coordenadas euclideanas de p. Note que

A métrica de D neste sistema de coordenadas (x, y) é dada por $\mathrm{d}s^2 = \cosh^2(y)dx^2 + dy^2$.

Sejam e_x e e_y os campos de vetores unitários na direção de x e y, respectivamente. Seja $t(s)$ o campo unitário tangente à c no sentido do movimento (s parâmetro comprimento de arco). Seja $n(s)$ o normal unitário apontando para o sentido dos y crescentes. Seja α o ângulo orientado de $t(s)$ à e_y. Faça uma figura !!. Note as seguintes relações

$$\begin{aligned}
e_x &= \frac{1}{\cosh y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \\
\sin\alpha &= \cosh y \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \quad \cos\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\
n(s) &= -\cos\alpha\, e_x + \sin\alpha\, e_y \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} &= \frac{-\cos\alpha}{\cosh y}\,\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\,\frac{\partial}{\partial y} \\
\dot{c} &= \frac{\sin\alpha}{\cosh y}\,\frac{\partial}{\partial x} + \cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}$$

Suponha que $f(s,t)$, $a \leqslant s \leqslant b$, $0 \leqslant t < \delta$ seja uma dada variação própria de $c(s)$, i.e, $f(s,0) = c(s)$ e $f(a,t) = c(a)$, $f(b,t) = c(b)$. Seja $g := \cosh y$.

Note que o *campo variacional* é dado por $V(s) = g \cdot (\partial x \,/\, \partial t)_0\, e_x + (\partial y \,/\, \partial t)_0\, e_y$ ($g = \cosh y$).

Note que a fórmula da primeira variação fica

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_c(t)\Big|_{t=0} = -\int_a^b \Bigg\{ & \left(2gg'\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + g^2\,\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}s^2}\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_0 \\
& + \left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}s^2} - gg'\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2\right)\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_0 \Bigg\}\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Conclua *à partir da fórmula da primeira variação* que esta determina a curvatura geodésica de c, e infira dos itens anteriores que a curvatura (geodésica) de c, com respeito ao normal n é dada por

$$k(s) = -\frac{d\alpha}{ds} - \tanh y\,\sin\alpha.$$

Note que isto dá uma curvatura principal $k_1 = k$ da superfície de revolução gerada por c.

Note que a outra curvatura principal k_2 é dada por $k_2 = -\sin\alpha \, \coth y$.

Considere um sistema de coordenadas de B dado por x, y, θ, onde θ é o ãngulo de rotação em torno do eixo x. Note que a métrica de B neste sistema de coordenadas se escreve como $\mathrm{d}s^2 = \sinh^2 y \; \mathrm{d}\theta + \cosh^2 y \; \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$ Considere $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ e $\frac{\partial}{\partial \theta}$, os campos adaptados a este referencial. Seja $\nu := \frac{1}{\|\frac{\partial}{\partial\theta}\|}\frac{\partial}{\partial\theta}$. Note que

$$\nabla_{\dot c}\dot c = -\big(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} + \sin\alpha \; \tanh y\big)n$$

$$\nabla_\nu \nu = -\coth y \, \frac{\partial}{\partial y}$$

Usando estas fórmulas re-obtenha as curvaturas principais k_1 e k_2 obtidas no item (c),(iii),(iv).

Note que se a curva c é o gráfico de uma função positiva $y = y(x)$, então as curvaturas principais da superfície de revolução gerada por c são dadas por:

$$k_1 = \frac{y'' \cosh y - 2\sinh y \, y' - \sinh y \; \cosh^2 y}{(\cosh^2 y + y'^2)^{3/2}} \qquad \text{e}$$

$$k_2 = -\frac{\cosh^2 y}{\sinh y(\cosh^2 y + y'^2)^{1/2}}$$

Encontre uma integral primeira da equação da curvatura média constante no espaço hiperbólico de uma curva geratriz de uma superfície de revolução, mostrando que

$$\frac{v \, \cosh^2 y}{\sqrt{(cosh^2 y + y'^2)}} - 2H\,u = \text{ const}$$

onde $v = c\sinh y$, $c =$ comprimento do círculo hiperbólico unitário e $u = \frac{c\,(\sinh y)^2}{2}$.

Considere $\mathbb{H}^{n+1} = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n); \;\; x_n > 0)\}$ o modelo do semi-espaço do espaço hiperbólico munido da métrica $\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{x_n}\,(dx_0^2 + dx_1^2 +$

$\cdots + dx_n^2)$. Seja $\mathcal{P}$ o hiperplano totalmente geodésico dado por $\mathcal{P} = \{x_0 = 0\}$. Seja $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ um domínio de $\mathcal{P}$. Seja M uma hipersuperfície de $\mathbb{H}^{n+1}$ Seja N um campo de vetores unitários (na métrica hiperbólica) normal à M.

Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, uma curva paramerizada por comprimento de arco (hiperbólico). Seja κ_N a curvatura normal de α com respeito à N. Reparametrizando α pelo parâmetro comprimento de arco euclideano (visto M como hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$), obtemos uma curva β. Considere a curvatura normal k_{N} de β com respeito ao campo de vetores N unitários (na métrica euclideana) normal à M. Note a seguinte relação:

$$\kappa_N = k_{\mathrm{N}}\, x_n + \mathrm{N}_n$$

onde N_n representa a última componente de N.

Deduza à partir da fórmula anterior a equação da curvatura média pré -determinada H de um *gráfico horizontal* dado por uma função $x_0 = u(x_1, \ldots, x_n)$ definida sobre um domínio $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$.

Idem para a equação da curvatura média pré-determinada H de um *gráfico vertical* dado por uma função $x_n = u(x_0, \ldots, x_{n-1})$ definida sobre um domínio $\Omega \subset \partial_\infty \mathbb{H}^{n+1}$.

Note um teorema tipo Olinde Rodrigues para superfícies M em $\mathbb{H}^3$. Note também que a semi-soma das curvaturas normais em um ponto $p \in M$, para qualquer par de direções ortogonais é igual a curvatura média $H(p)$ de M em p.

Note que as linhas principais de M em $\mathbb{H}^{n+1}$ e de M em $\mathbb{R}^{n+1}$ *coincidem*. Conclua que M é totalmente umbílica em $\mathbb{H}^{n+1} \Leftrightarrow M$ é totalmente umbílica em $\mathbb{R}^{n+1}$. Dê a classificação das hipersuperfícies totalmente umbílicas de $\mathbb{H}^{n+1}$. Dê também outra demonstração deste fato. Deduza a classificação das superfícies isoparamétricas de $\mathbb{H}^3$, seguindo o seguinte roteiro : Seja $p \in M$, um ponto não umbílico de uma superfície M em $\mathbb{H}^3$.

Note que existe um referencial ortornormal $\{X_1, X_2\}$ numa vizinhança de p *principal*, i.e, $AX_i = k_i X_i, i = 1, 2$, onde A é o *operador de Weingarten* que representa a segunda forma fundamental de M.

Seja ∇ a conexão de M. Note que as quantidades $\nabla_{X_2} X_1$, $\nabla_{X_1} X_2$, $\nabla_{X_1} X_1$, $\nabla_{X_2} X_2$ estão determinadas por funções a, b que dependem apenas de k_1, k_2 e das suas derivadas com respeito a X_1, X_2. Precisamente, note que numa vizinhança u de p:

$$\nabla_{X_2} X_1 = b\, X_2 \qquad \nabla_{X_1} X_2 = a\, X_1 \quad [X_1, X_2] = a\, X_1 - b\, X_2 \tag{12}$$

$$\nabla_{X_2} X_2 = -b\, X_1 \qquad \nabla_{X_1} X_1 = -a\, X_2 \tag{13}$$

onde $a = \dfrac{X_2(k_1)}{k_2 - k_1}$ e $b = -\dfrac{X_1(k_2)}{k_2 - k_1}$. Além disto, note que

$$\begin{aligned} K_e := k_1\, k_2 = & \frac{(X_1^2(k_2) - X_2^2(k_1))(k_2 - k_1)}{(k_2 - k_1)^2} \\ & + \frac{X_1(k_2)(2X_1(k_2) - X_1(k_1))}{(k_2 - k_1)^2} \\ & + \frac{X_2(k_1)(X_2(k_2) - 2X_2(k_1))}{(k_2 - k_1)^2} + 1 \end{aligned} \tag{14}$$

em U. *Sugestões*: As equações (12), (13) seguem da compatibilidade, da simetria e das equações de Codazzi. Enquanto que a equação (14) segue da equação de curvatura de Gauss.

Note que existe um sistema de coordenadas principais numa vizinhança de p. *Sugestão*: Basta mostrar que existem campos $Y_1 = f\, X_1$ e $Y_2 = g\, X_2$; tais que $[Y_1, Y_2] = 0$. Conclua que uma superfície isoparamétrica (i.e todas as curvaturas principais são constantes), *não umbílica* é um cilindro hiperbólico.

Neste item serão abordados algumas aplicações do princípio do máximo e do princípio de reflexão de Alexandrov. Note que uma superfície propriamente mergulhada em $\mathbb{H}^3$ de curvatura média constante cujo bordo assimptótico é um ponto é uma horosfera. E se o bordo assimptótico for um círculo ? E se a superfície é uma superfície especial de Weingarten ?

Note que o seguinte *teorema de Hsiang*: Uma superfície propriamente mergulhada de $\mathbb{H}^{n+1}$ contida dentro de um cilindro, com curvatura média constante é uma hipersuperfície de revolução. O que você pode dizer, sob as mesmas condições , se a superfície é uma superfície especial de Weingarten ?

Note que se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio que contém discos de raios arbitrariamente grandes então não existe uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$, e um número positivo $c > 0$ tal que a curvatura média H do gráfico de f satisfaça $H \geqslant c > 0$

Note que não existe um gráfico vertical mínimo em $\mathbb{H}^{n+1}$ sobre um semi- espaço fechado do bordo assimptótico $\partial_\infty \mathbb{H}^{n+1}$.

Elabore um resumo sobre as relações entre uma superfície de curvatura média 1 em $\mathbb{H}^3$ e as superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$.

Referências

[1] Lars Ahlfors. *Complex analysis.* Mc Graw-Hill, 1996.

[2] Marcos M. Alexandrino. *Hipersuperfcies de nvel de uma funo transnormal.* Dissertação de mestrado, PUC-Rio, 1997.

[3] Sheldon Axler, Paul Bourdon & Wade Ramey. *Harmonic Function Theory.* Second edition, Springer 2001.

[4] T. Amaranath. *Partial differential equations.* Segunda edição. Alpha Science, England, 2003.

[5] William E. Boyce & Richard C. DiPrima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.* Guanabara-Koogan, 1994.

[6] Ruel V. Churchill. *Operational mathematics.* Third edition. 1972.

[7] Manfredo do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1976.

[8] C. H. Edwards & David E. Penny. *Equações diferenciais elementares.* Prentice-Hall do Brasil, 1993.

[9] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations.* AMS, 1998

[10] Gerretsen e G. Sansone. *Lectures on the theory of functions of complex variable I, II.* Wolters-Noordhoff Publishing Goningen 1969.

[11] Einar Hille. *Analytic function theory I,II.* Chelsea, Nova York, 1982.

[12] Heinz Hopf. *Differential Geometry in the large* . Lecture notes in mathematics, **1000**, Springer, 1989.

[13] Jürgen Jost. *Partial differential equations.* Springer, 2002

[14] Serge Lang. *Complex Analysis.* Fourth Edition, Springer, 1999.

[15] A. I. Markushevich. *Theory of functions of a complex variables I, II, III.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965

[16] A. Martin. *Equations aux dérivées partielles.* Dunod, Paris, 1991.

[17] Zeev Nehari. *Conformal maps.* Dover Publi.,N. Y. 1975.

[18] Anthony D. Osborne. *Complex variables and their applications.* Addison-Wesley, 1999.

[19] Murray H. Protter & Hans F. Weinberger. *Maximum principles in differential equations.* Prentice-Hall, 1967.

[20] Robert Osserman. *A survey of minimal surfaces.* Dover Public. Inc, N. Y, 1986.

[21] Cristian Pommerenke. *Boundary behavior of conformal maps.* Springer, 1992.

[22] Reinhold Remmert. *Theory of complex functions.* Springer, 1991 (*Readinds in Mathematics*).

[23] Reinhold Remmert. *Classical topics in complex function theory.* Springer, 1998.

[24] Ricardo Sá Earp e Eric Toubiana. *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann*. Diderot, multimedia, 1997. Segunda edição, ed. Cassini, Paris. No prelo.

[25] Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry* . Publish or Perish, 1979.

[26] Daniel Zwillinger. *Handbook of differential equations.* Segunda edição, Academic Press, 1992.