$2^{\underline{o}}$ Exame de Geometria Hiperbólica

prof. Ricardo Sá Earp *10 de novembro de 2000*

$1^{\underline{a}}$ **Questão** (2.0 pts): Seja $\gamma(y) = (u(y), y),\ y > 0$, uma curva de $\mathbb{H}^2$ dada por uma função u de classe C^2 definida num intervalo $I = (0, \infty)$. Mostre que γ é completa. Em seguida mostre que se $k_h^+(\gamma(y))$ (*curvatura com sinal de* γ) satisfaz $k_h^+(\gamma(y)) \geqslant 1,\ \forall y > 0$, então a função u não pode ser limitada inferiormente.

$2^{\underline{a}}$ **Questão** (2.0 pts): Mostre *com todos os detalhes* que $\mathbb{C}$ não admite uma métrica completa $\mathrm{d}s^2 := \rho^2(z)|\,\mathrm{d}z|^2$ com curvatura de Gauss $K \equiv -1$.

Sugestão : Raciocine por absurdo, supondo que $\mathbb{C}$ admite uma métrica com $K \equiv -1$. Mostre primeiramente que a métrica $\lambda^2(z)|\,\mathrm{d}z|^2$; $\lambda(z) = \dfrac{2R}{R^2 - |z|^2}$, é uma métrica completa na bola aberta de raio R, digamos $\mathcal{D}_R$, centrada na origem com curvatura de Gauss identicamente igual a -1. Em seguida mostre que $\log\lambda - \log\rho$ admite um mínimo global em $\mathcal{D}_R$. Deduza que $\lambda \geqslant \rho$ em $\mathcal{D}_R$, inferindo daí o resultado desejado.

$3^{\underline{a}}$ **Questão** (2.0 pts): Mostre *com todos os detalhes* que $\mathbb{C}$ é uma superfície de Riemann simplesmente conexa parabólica.

$4^{\underline{a}}$ **Questão** (2.0 pts): Sejam M e N duas superfícies de Riemann munidas da métrica hiperbólica obtida no item anterior (ou seja, o recobrimento conforme de ambas superfícies é o disco unitário $\mathcal{D}$). Assuma primeiro que ambas M e N sejam simplesmente conexas. Mostre que se $f : M \to N$ é uma aplicação holomorfa da superfície de Riemann M na superfície de Riemann N que não é uma equivalência conforme então f encolhe estritamente o comprimento das curvas. No caso geral demonstre o seguinte: Ou bem, $f : M \to N$ é uma isometria local na métrica hiperbólica e uma aplicação de recobrimento, ou bem $f : M \to N$ encolhe estritamente o comprimento das curvas.

$5^{\underline{a}}$ **Questão** (2.0 pts): Exiba condições " minimais" que implicam que uma determinada *isometria positiva* de $\mathbb{H}^3$ é a identidade. Idem para uma isometria qualquer de $\mathbb{H}^3$.