GEOMETRIA HIPERBÓLICA -2000.2–Lista4

Professor: Ricardo Sá Earp

1) Considere $\mathcal{D}$ o disco de Poincaré. Mostre que a quantidade

$$\frac{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}{|1-\overline{z_1}z_2|^2}$$

é um invariante conforme de $\mathcal{D}$ ($z_1, z_2 \in \mathcal{D}$).

2) Mostre que toda aplicação de Möbius f agindo na esfera de Riemann $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ tem uma das seguintes formas

$$f(z) = \lambda\,\mathrm{e}^{i\theta}\cdot z + \beta \qquad \text{ou} \qquad f(z) = \alpha + \frac{\lambda\,\mathrm{e}^{i\theta}}{z+\beta}$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$.

3*) (*A ultramétrica de Ahlfors*) Geralmente uma métrica Riemanniana é dada em "coordenadas isotérmicas $z = x + iy$"(ou conforme) na seguinte forma

$$\mathrm{d}s^2 = \rho^2(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)$$

onde $\rho > 0$ e $\mathrm{d}s$ é conforme à métrica Euclideana. A quantidade

$$K(\rho) := -\frac{\triangle \log \rho}{\rho^2}, \quad \rho \in C^2$$

é a bem conhecida *curvatura de Gauss* da métrica. Já vimos que a curvatura de Gauss da métrica hiperbólica é -1, e que $K \equiv 1$ para a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$.

a) Mostre que $K(\rho)$ é um invariante conforme. Mais precisamente, dada uma aplicação conforme $w = f(z)$, define-se $\tilde{\rho}(w)$ obrigando que $\rho|\,\mathrm{d}z| = \tilde{\rho}|\,\mathrm{d}w|$, ou mais explicitamente, $\rho(z) = \tilde{\rho}(f(z))|f'(z)|$.

Doravante condideraremos a métrica hiperbólica em $\mathcal{D}$ denotada por $\lambda(z)|\,\mathrm{d}z|$, isto é $\lambda(z) = 2/(1-|z|^2)$.

b) Mostre que se ρ satisfaz $K(\rho) \leqslant -1$ em $\mathcal{D}$, então $\lambda(z) \geqslant \rho(z)$ para todo $z \in \mathcal{D}$. *Sugestão* : Assuma primeiramente que ρ tem extensão contínua e estritamente positiva ao disco fechado, e em seguida reduza a situação geral a este caso.

c) Uma métrica $\rho|\,\mathrm{d}z|$, $\rho \geqslant 0$ é chamada de ultramétrica num domínio Ω se tem as seguintes propriedades:

i) ρ é semi-contínua superiormente.

ii) Para cada $z_0 \in \Omega$ com $\rho(z_0) > 0$ existe uma "métrica suporte" ρ_0 de classe C^2 numa vizinhança V de z_0, tal que $\triangle \log \rho_0 \geqslant \rho_0^2$ e $\rho \geqslant \rho_0$ em V, com $\rho(z_0) = \rho_0(z_0)$. Note que $\log \lambda - \log \rho$ é semi-contínua inferiormente, a existência de um mínimo no raciocínio acima está assegurada. Tal mínimo será também um mínimo local de $\log \lambda - \log \rho_0$, e o resto do raciocínio se aplica como antes. A desigualdade $\lambda(z) \geqslant \rho(z)$ pode ser verificada sempre que ρ é ultramétrica. Mostre a seguinte versão forte do *lema de Schwarz*:

iii) Seja f uma função analítica de $\mathcal{D}$ em uma região Ω na qual está dada uma métrica ultrahiperbólica ρ. Mostre que

$$\rho(f(z))|f'(z)| \leqslant \frac{2}{(1 - |z|^2)}$$

Observe que a quantidade da esquerda é uma métrica ultrahiperbólica em $\mathcal{D}$, os zeros de $f'(z)$ são as singularidades desta métrica. Você saberia dar exemplos de métricas ultrahiperbólicas em $\mathcal{D}$?

BIBLIOGRAFIA

1. Lars Ahlfors. *Conformal invariants: topics in geometric function theory.* McGraw-Hill, 1973.

2. João L. Barbosa, Ricardo Sá Earp. *Geometric methods and nonlinear analysis.* X Escola de Geometria Diferencial, UFMG, 20 à 24 de julho de 1998.

3. Alan F. Beardon. *Iteration of rational functions.* Springer, 1999.

4. Lennart Carleson and Theodore W. Gamelin. *Complex dynamics.* Springer, 1993.

5. Manfredo P. do Carmo. *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides, 1998.

6. Hershel M. Farkas and Irwin Kra. *Riemann Surfaces* . Springer, 1980.

7. Noel J. Hicks. *Notes on differential geometry* . Van Nostrand, 1965.

8. Heinz Hopf. *Differential geometry in the large.* Lecture Notes in Mathematics, **1000**. Springer, 1989.

9. John G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds.* Springer, 1994.

10. Ricardo Sá Earp et Eric Toubiana. *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann.* Diderot multimedia, 1997.

11. Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry* , second edition. Publish or Perish, 1979.

12. William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology.* Edited by Silvio Levy, Princeton University Press, 1997.