GEOMETRIA HIPERBÓLICA -2000.2–Lista6

Professor: Ricardo Sá Earp

Nesta lista fazemos uma complementação da Lista 5 contendo repetições , visando assim atingir um melhor entendimento da geometria conforme.

1) Considere uma curva C, parametrizada por $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$. O comprimento compr (C) está definido por

$$\operatorname{compr}(C) = \sup \sum_{\nu=1}^{n} |\gamma(t_\nu) - \gamma(t_{\nu-1})|$$

onde o supremo está tomado sobre todas as partições $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que C é retificável se compr$(C) < \infty$. Quando γ é C^1 por partes então segue de um argumento standard que

$$\operatorname{compr}(C) = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\, \mathrm{d}t$$

Agora, considere U um aberto de $\mathbb{C}$ e seja C uma curva em U *com uma extremidade aberta* que possui uma parametrização contínua $\gamma : [\alpha, \beta) \to U$. Diz-se que o comprimento de C é

$$\operatorname{compr}(C) = \lim_{\tau \to \beta} \operatorname{compr}(C_\tau)$$

onde C_τ é a curva parametrizada por $C_\tau \gamma : [\alpha, \tau] \to U$. Diz-se que C termina em b se existe o limite

$$b = \lim_{t \to \beta} \gamma(t) \in \overline{U} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Note que $\overline{C} = C \cup \{b\}$ é uma curva em $U \cup \{b\}$. Diremos simplesmente que C é uma curva em U terminando em b.

a) Seja C uma curva em U *com uma extremidade aberta* que possui uma parametrização contínua $\gamma : [\alpha, \beta) \to U$, com $\operatorname{compr}(C) < \infty$. Mostre que C termina num ponto $b \in \overline{U}$.

Precisamos em seguida do conceito de *ângulo de Stolz*. Um *ângulo de Stolz* em $\zeta \in \partial\mathcal{D} := S^1$ é da forma

$$\triangle := \{z \in \mathcal{D};\, |\arg(1 - \overline{\zeta} z)| < \alpha,\ |z - \zeta| < \rho\} \ \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ \rho < 2\cos\alpha\right)$$

Agora seja f uma função de $\mathcal{D}$ em $\mathbb{C}$. Diz-se que f tem o *limite angular* $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ em $\zeta \in S^1$ se

$$f(z) \to a, \qquad \text{quando} \quad z \to \zeta,\ z \in \triangle$$

para qualquer ângulo de Stolz $\triangle$ em ζ; sendo o ângulo de abertura 2α de $\triangle$ qualquer número $< \pi$.

O conceito de limite radial é bem claro: Diz-se que f tem o *limite radial* $\alpha \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ em $\zeta \in S^1$ se

$$f(\zeta) := a = \lim_{r \to 1} f(r\zeta)$$

Os seguintes teoremas notáveis remontam a Carathéodory e Lindelöf:
Teorema : *Se f é uma aplicação conforme de $\mathcal{D}$ sobre $\Omega \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ então f tem limite angular a em $\zeta \in S^1 \Leftrightarrow f$ tem limite radial a em ζ.*

Teorema : *Seja f uma equivalência conforme que leva $\mathcal{D}$ sobre um domínio simplesmente conexo Ω. Seja γ um arco de Jordan em Ω que termina em $z_0 \in \partial\Omega$. Então a curva $f^{-1} \circ \gamma$ em $\mathcal{D}$ termina num ponto $\zeta_0 \in S^1$, e $\varphi(\zeta) \to z_0$ quando $\zeta \to \zeta_0$ dentro de qualquer ângulo de Stolz $\triangle$ em ζ_0, ou seja f tem limite angular z_0 em ζ_0.*

b) Seja f uma aplicação conforme da bola unitária aberta $\mathcal{D} = \{|z| < 1\}$ em $\mathbb{C}$. Mostre que

$$f(\zeta) = \lim_{r \to 1} f(r\zeta) \neq \infty$$

existe para *quase todo* $\zeta \in S^1$ e

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r\,e^{it}) - f(0)|^{2/5} \leqslant 5|f'(0)|^{2/5} \qquad \text{para} \quad 0 \leqslant r < 1$$

Sugestão : Você será guiado neste exercício. Assuma que $f \in \mathcal{S}$, onde $\mathcal{S}$ é a classe de funções univalentes na bola $\mathcal{D}$ com $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$, estudada na Lista 5. Mostre que a função

$$g(z) = f(z^5)^{1/5} = z\left(\frac{f(z^5)}{z^5}\right)^{1/5} = \sum_1^\infty b_n z^n$$

é analítica e univalente em $\mathcal{D}$. Mostre que a fórmula de Parseval implica

$$\frac{1-r}{2\pi}\int_0^\pi |g'(r\,\mathrm{e}^{it})|^2\,\mathrm{d}t = (1-r)\sum_{n=1}^\infty n^2|b_n|^2 r^{2n-2}$$

para $0 \leqslant r < 1$. Mostre que como $n(1-r)r^{n-1} \leqslant 1$, e como g é univalente, então

$$\begin{aligned}\sum_1^\infty n|b_n|^2 r^{n-1} &= \frac{1}{\pi r}\,\mathrm{area}\{g(z);\ |z| \leqslant \sqrt{r}\}\\ &= \frac{1}{r}\max_{|z|\leqslant\sqrt{r}}|g(z)|^2 \leqslant (1-r^{5/2})^{-4/5} \leqslant (1-r)^{-4/5},\end{aligned}$$

usando a primeira equação do teorema de distorção de Koebe (veja exerc. 2) da Lista 5 ou veja adiante) e a definição de g. Conclua que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)^{9/10}|g'(r\,\mathrm{e}^{it})|^2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r \leqslant \int_0^1 (1-r)^{-9/10}\,\mathrm{d}r = 10$$

Aplicando a desigualdade de Schwarz mostre que

$$\left(\int_0^1 |g'(r\,\mathrm{e}^{it})|\,\mathrm{d}r\right)^2 \leqslant \int_0^1 (1-r)^{-9/10}\,\mathrm{d}r \int_0^1 (1-r)^{9/10}|g'|^2\,\mathrm{d}r$$

Integrando, mostre que usando a penúltima inequação obtém-se

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 |g'(r\,\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{d}r\right)^2 \leqslant 100$$

Logo, a integral que está entre parêntesis é finita para quase todo t e $\lim_{r\to 1} g(r\,\mathrm{e}^{it}) \neq \infty$ existe para estes valores de t pelo item a). Finalmente, use a fórmula de Parseval de novo para mostrar

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r^5\,\mathrm{e}^{it})|^{2/5}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(r\,\mathrm{e}^{it})|^2\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \leqslant 5$$

Nota: Segue da estimativa acima obtida no item b) segue que f pertence ao espaço de Hardy $H^{2/5}$; na verdade $f \in H^p$ para $p < 1/2$ ($H^p \underset{\neq}{\subset} H^q$, se $0 < q < p$). Se g é uma função analítica limitada (ou seja, $f \in H^\infty$) definida em $\mathcal{D}$ então o *teorema de Fatou* diz que o *limite radial* $\lim\limits_{r\to 1} g(r\,\mathrm{e}^{\theta})$ existe para quase todo ponto de S^1, e se f não é identicamente zero, $\lim\limits_{r\to 1} g(r\,\mathrm{e}^{\theta}) \neq 0$, para quase todo ponto de S^1. Este resultado vale também para $f \in H^p$, para $0 < p \leqslant \infty$. Para estes resultados você pode consultar o livro de Rudin (Real and Complex Analysis) ou a referência 7). Existe ainda um belíssimo resultado de Plessner ainda mais geral.

Teorema de Plessner : Se g é meromorfa em $\mathcal{D}$ então , para quase todo $\zeta \in S^1$, ou bem g tem limite angular finito em ζ, ou bem $g(\triangle)$ é denso em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ para qualquer ângulo de Stolz $\triangle$ em ζ.

Portanto, o comportamento no bordo, em quase todos os pontos, é bom ou muito ruim.

c) Deduza do teorema de Plessner, o seguinte ***teorema de unicidade de Privalov***: Se uma função meromorfa em $\mathcal{D}$ tem limite ângular 0 num conjunto de medida positiva de S^1. então esta se anula identicamente.

2) Agora vamos enfocar algumas propriedades básicas de funções harmônicas e subharmônicas, algumas de muito importância no que se segue.

a) Seja u uma função harmônica em $\mathcal{D}$. Seja f uma função holomorfa em $\mathcal{D}$ tal que $\mathrm{Re\,f} = \mathrm{u}$ (por quê existe tal f ?) Mostre que para $|z| < r$ onde $0 < r < 1$ tem-se que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r\,\mathrm{e}^{it})\frac{r\,\mathrm{e}^{it}+z}{r\,\mathrm{e}^{it}-z}\,\mathrm{d}t$$

Deduza daí a fórmula de Poisson no disco $|z| < r$ para u.

b) Enuncie a solução do problema de Dirichlet para funções harmônicas no disco fazendo uso da fórmula de Poisson.

c) Mostre, com todos os detalhes, que se uma função harmônica é limitada no disco perfurado $\mathcal{D}^*$, então se estende harmônicamente a todo o disco $\mathcal{D}$.

d) Uma função u de classe C^2 definida num domínio Ω é chamada de subharmônica, se $\triangle u \geqslant 0$ em Ω. Demonstre com todos os detalhes o princípio do máximo interior e do bordo para funções subharmônicas (veja a ref. 11 ou a ref. 2).

e) Mostre que se uma seqüência $\{u_n\}$ de funções harmônicas numa *superfície de Riemann* M converge uniformemente a uma função u em compactos de M, então u é necessariamente harmônica. Supondo que $M = \Omega$ um domínio em $\mathbb{C}$ mostre que a seqüência das derivadas parciais converge uniformemente em compactos para a derivada parcial de u. *Sugestão* : Para a primeira pergunta use o fato que ser harmônica é uma propriedade local e reduza o problema ao caso que M é um aberto de $\mathbb{C}$. Para a segunda pergunta use a fórmula do item a).

f) Demonstre a *desigualdade de Harnack* para funções harmônicas e deduza o *teorema de Liouville* : Se uma função harmônica definida em todo o plano complexo é, limitada ou bem superiormente ou bem inferiormente, então é necessariamente uma constante.

g) Demonstre o *teorema de três círculos de Hadamard*: Seja $u(z)$ uma função subharmônica num domínio Ω, contendo dois círculos concêntricos de raios r_1 e r_2 e o anel delimitado por estes. Seja $M(r)$ o máximo de u num determinado círculo de raio r, então para $r_1 < r < r_2$, mostre que vale a seguinte desigualdade

$$M(r) \leqslant \frac{M(r_1)\log(r_2/r) + M(r_2)\log(r/r_1)}{\log(r_2/r_1)}$$

e ocorre a igualdade, se e somente se

$$u = \frac{M(r_1)\log(r_2/r) + M(r_2)\log(r/r_1)}{\log(r_2/r_1)}$$

onde $r = |z|$. *Sugestão* : Aplique o princípio do máximo de forma conveniente.

i) Conclua o *teorema de Liouville*: Se uma função subharmônica definida em $\mathbb{C}^*$, o plano complexo menos um ponto, é limitada superiormente então é uma constante.

ii) Mais geralmente, mostre que se a hipótese de ser limitada superiormente é enfraquecida e substituída por

$$\liminf \frac{M(r)}{|\log r|} \leqslant 0$$

quando $r \to 0$ e quando $r \to \infty$, obtemos também que u é uma constante.

3) Vamos definir e explorar os importantes conceitos de parabolicidade e hiperbolicidade para uma superfície de Riemann. Diz- se que uma superfície de Riemann M é parabólica se M não é compacta e se não admite uma função negativa ($\leqslant 0$) subharmônica sobre M que não seja uma constante. Uma superfície de Riemann é chamada hiperbólica se possui uma função subharmônica negativa ($\leqslant 0$) sobre M que não é uma constante. Uma superfície de Riemann compacta é chamada de elíptica.

a) Mostre que uma superfície de Riemann hiperbólica não pode ser compacta.

b) Mostre que $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^*$ são superfícies de Riemann parabólicas. Mostre que a bola aberta unitária $\mathcal{D}$ é uma superfície de Riemann hiperbólica.

Seja M uma superfície de Riemann e seja $p \in M$. Uma função g é chamada de *função de Green para M com singularidade em p*, se

$$g \text{ é harmônica em } M \setminus \{p\}$$

$$g > 0 \quad \text{em } M \setminus \{p\}$$

se z é uma coordenada (conforme) se anulando em p, então

$$g(z) + \log|z| \text{ é harmônica numa vizinhança de } p.$$

se $\tilde{g}$ é outra funçao satisfazendo as três propriedades anteriores , então $\tilde{g} \geqslant g$

c) Mostre que a definição da função de Green acima não depende da escolha de coordenadas isotérmicas locais se anulando em p.

i) Mostre a função de Green para o disco unitário com singularidade em a é

$$g(z) = \log\left|\frac{1 - z\overline{a}}{z - a}\right|$$

d) Seja Ω um domínio de $\mathbb{C}$ de fecho compacto tal que $\partial\Omega$ consiste de um número finito de arcos analíticos. Seja $z_0 \in \Omega$. Resolvendo o problema de Dirichlet para funções harmônicas sendo dada uma função contínua f no bordo (o que sempre é possível, por quê ?), quando $f(z) = \log|z - z_0|$, $z \in \partial\Omega$, encontramos uma função u contínua em $\overline{\Omega}$ e harmônica em Ω tal que u restrita à $\partial\Omega$ é igual a f. Mostre que $g(z) = -\log|z - z_0| + u(z)$ é a função de Green para Ω com singularidade em z_0.

Nota: A existência de uma função de Green num ponto está ligada à existência de medidas harmônicas e é *equivalente* a hiperbolicidade . Numa superfície parabólica o problema de Dirichlet para funções harmônicas tem no máximo uma solução limitada (veja a ref. 6) .

4) Vamos voltar à classe $\mathcal{S}$ de funções *schlicht*, ou seja $f \in \mathcal{S}$, se f é analítica e univalente em $\mathcal{D}$ com $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$.

a) Mostre o *teorema um quarto de Koebe*: Se $f \in \mathcal{S}$ então f contém o disco aberto de raio $1/4$ centrado na origem. *Sugestão* : Suponha que f não assuma um certo valor $a \in \mathbb{C}$. Mostre que se $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$

$$\frac{af(z)}{a - f(z)} = z + \big(a_2 + \frac{1}{a}\big)z^2 + \cdots$$

pertence à $\mathcal{S}$. Aplique duas vezes o teorema de de Branges (veja Lista 5) para obter

$$\frac{1}{|a|} \leqslant |a_2| + \big|a_2 + \frac{1}{a}\big| \leqslant 4$$

Mostre que a função de Koebe $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ produz uma equivalência conforme entre o disco $\mathcal{D}$ e $\mathbb{C}\setminus(-\infty, -1/4]$. Ou seja o teorema um quarto de Koebe é ótimo.

b) Mostre que

$$\frac{1}{4} \leqslant \operatorname{dist}(0, \partial f(\mathcal{D})) \leqslant 1, \qquad f \in \mathcal{S}$$

Sugestão : Para conseguir a estimativa superior observe que a imagem de $f \in \mathcal{S}$ não pode cobrir o disco fechado, pois caso contrário, f^{-1} enviaria $\mathcal{D}$ num domínio estritamente contido em $\mathcal{D}$, contrariando o fato que $f'(0) = 1$ (por quê ?).

i) Traduzindo a estimativa anterior ao disco aberto (transladando e ajustando escala) $\mathcal{D}(z_0, \delta) := \{|z - z_0| < \delta\}$, mostre que

$\mathrm{dist}(f(z_0), \partial f(\mathcal{D}(z_0, \delta))) \geqslant \delta |f'(z_0)|/4$. Disto conclua

ii) Se f é univalente num domínio Ω, e $z_0 \in \Omega$, então

$$\frac{1}{4}|f'(z_0)|\,\mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega) \leqslant \mathrm{dist}(f(z_0), \partial(f(\Omega))) \leqslant 4|f'(z_0)|\,\mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$$

Sugestão : A estimativa inferior segue dos argumentos precedentes, a estimativa superior segue da estimativa inferior, aplicando- a a f^{-1} no ponto $f(z_0)$.

c) Mostre que se $f \in \mathcal{S}$ então

$$\mathrm{dist}(f(z), \partial f(\mathcal{D})) > \frac{1}{16}(1-|z|)^2, \qquad z \in \mathcal{D}$$

Sugestão : Aplique o teorema de um quarto de Koebe à transformação de Koebe h definida no item 1) da Lista 5, ou a estimativa anterior, e obtenha

$$\mathrm{dist}(f(z), f(\partial\Omega)) \geqslant \frac{1}{4}|f'(z)|(1-|z|^2)$$

Agora é só aplicar a estimativa inferior para $|f'(z)|$ do teorema de distorção de Koebe enunciado no item 2) da Lista 5.

BIBLIOGRAFIA

1. Lars Ahlfors. *Conformal invariants: topics in geometric function theory.* McGraw-Hill, 1973.

2. João L. Barbosa, Ricardo Sá Earp. *Prescribed mean curvature hypersurfaces in H^{n+1} with convex planar boundary, II.* Séminaire de théorie spectrale et géométrie de Grénoble, **16**, 43-79, 1998.

3. Alan F. Beardon. *Iteration of rational functions.* Springer, 1999.

4. Lennart Carleson and Theodore W. Gamelin. *Complex dynamics.* Springer, 1993.

5. Manfredo P. do Carmo. *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides, 1998.

6. Wellington de Melo. *Ferramentas matemáticas em dinâmica unidimensional.* Preprint. 2000 (a ser publicado na Revista Matemática Universitária).

7. Hershel M. Farkas and Irwin Kra. *Riemann Surfaces* . Springer, 1980.

8. R. E Greene e S. G. Krantz. *Function theory of one complex variables.* John Wiley and Sons, N. Y, 1997.

9. Noel J. Hicks. *Notes on differential geometry* . Van Nostrand, 1965.

10. Heinz Hopf. *Differential geometry in the large.* Lecture Notes in Mathematics, **1000**. Springer, 1989.

11. Christian Pommerenke. *Boundary behavior of conformal maps.* Springer, 1992.

12. Murray H. Protter e Hans F. Weinberger. *Maximum principles in differential equations.* Prentice- Hall, 1967.

13. John G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds.* Springer, 1994.

14. Ricardo Sá Earp et Eric Toubiana. *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann.* Diderot multimedia, 1997.

15. Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry* , second edition. Publish or Perish, 1979.

16. William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology.* Edited by Silvio Levy, Princeton University Press, 1997.