# GEOMETRIA HIPERBÓLICA -2000.2–Lista7

*Professor: Ricardo Sá Earp*

1) Seja $\mathbb{H}^3 := \{(x,y,z);\ \ z > 0\}$. Considere a semi-esfera $S = S_r(a) := \{p = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ |p-a|_{\mathbb{R}^3} = r, z > \ 0\}$, onde $a \in \{(x,y,z);\ \ z = 0\}$ e $r > 0$. Considere a *reflexão*, ou *simetria* ou *inversão* com respeito à $S$ definida por

$$I(p) = a + \frac{r^2}{|p-a|^2_{\mathbb{R}^3}} \cdot (p-a)$$

a) Mostre que $I$ é um difeomorfismo anti-conforme preservando $\mathbb{H}^3$, levando $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ em si mesmo, deixando fixos todos os pontos de $S$ e satisfazendo $I \circ I(p) = p$, para todos os pontos $p \in \mathbb{H}^3$. Mostre que $I$ provém de uma única inversão em um círculo em $\partial_\infty \mathbb{H}^3 \equiv \mathbb{C} \cap \{\infty\}$.

b) Mostre que $I$ leva as calotas esféricas, , semi-planos verticais, semi-planos inclinados, planos horizontais, esferas em $\mathbb{H}^3$ em calotas esféricas, ou semi-planos verticais, ou semi-planos inclinados, ou planos horizontais ou esferas em $\mathbb{H}^3$. Deduza que $I$ leva círculos ou retas em círculos ou retas. Faça um exame minucioso e discuta cada caso separadamente examinando todas as possibilidades como você fez, anteriormente, com as inversões em círculos.

c) Mostre que se $p.q \in \mathbb{H}^3$, então

$$|I(p) - I(q)|_{\mathbb{R}^3} = \frac{r^2 |p-q|_{\mathbb{R}^3}}{|p-a|_{\mathbb{R}^3} |q-a|_{\mathbb{R}^3}}$$

Considere $\mathbb{H}^3$ o espaço hiperbólico munido da métrica hiperbólica
$\mathrm{d}s^2 = \dfrac{1}{z^2} \cdot \left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\right)$.

2) Mostre *com todos os detalhes* que a inversão $I$ do item 1) é uma isometria *negativa* de $\mathbb{H}^3$.

Lembremos que as *geodésicas* de $\mathbb{H}^3$ são as semi-retas verticais contidas em $\mathbb{H}^3$ partindo do bordo assimptótico $(\partial_\infty \mathbb{H}^3)$ e os semi-círculos em $\mathbb{H}^3$ ortogonais à $\partial_\infty \mathbb{H}^3$.

3) Mostre que de fato as curvas descritas logo acima são todas as geodésicas de $\mathbb{H}^3$. Mostre que dada duas geodésicas $\gamma_1$ e $\gamma_2$ existe uma isometria positiva de $\mathbb{H}^3$ levando $\gamma_1$ em $\gamma_2$.

4) Mostre que a rotação *em torno de uma geodésica* $\gamma$, também chamada de rotação hiperbólica, é uma isometria positiva de $\mathbb{H}^3$. Descreva-a com detalhes geometricamente. Mostre que a rotação hiperbólica leva pedaços de planos ou esferas em $\mathbb{H}^3$ em pedaços de planos ou esferas em $\mathbb{H}^3$.

5) Mostre que a translação *ao longo de uma geodésica* $\gamma$, ou simplesmente translação hiperbólica, ou mais simplesmente ainda translação , é uma isometria positiva de $\mathbb{H}^3$. Mostre que a translação hiperbólica leva pedaços de planos ou esferas em $\mathbb{H}^3$ em pedaços de planos ou esferas em $\mathbb{H}^3$. Descreva-a com detalhes geometricamente.

Considere $B^3 := \{p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ o *modelo da bola* do espaço hiperbólico munido da métrica $\mathrm{d}s^2 = \dfrac{4}{(1 - (x^2 + y^2 + z^2))^2} \cdot \left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\right)$.

6) Mostre que $F : B^3 \to \mathbb{H}^3$ definida por $F(x, y, z) = \dfrac{2(x, y, z + 1)}{x^2 + y^2 + (z + 1)^2} - (0, 0, 1)$ produz uma isometria global de $B^3$ em $\mathbb{H}^3$ que inverte orientações . Descreva geometricamente $F$ e dê sua inversa. Além disso modifique ligeiramente $F$ e obtenha uma isometria positiva. Descreva as geodésicas no modelo da bola.

Dizemos que uma superfície $M$ é *totalmente geodésica*, se dado um ponto $p$ de $M$ tem-se que toda geodésica $\gamma$ de $M$ partindo de $p$ é geodésica de $\mathbb{H}^3$. Dizemos que uma superfície $M$ é uma superfície *equidistante* se $M$ é o lugar geométrico dos pontos em $\mathbb{H}^3$ que possuem mesma distância fixada $\rho$ de uma superfície totalmente geodésica. Dizemos que $M$ é uma *esfera geodésica* se $M$ é o lugar geométrico dos pontos em $\mathbb{H}^3$ que possuem mesma distância fixada $\rho$ de um ponto fixado $p$. Dizemos que $M$ é uma horosfera se existe $p \in M$ tal que $M$ é o limite em $\mathbb{H}^3$ de esferas de raios variados $\rho$ que passam por $p$ fazendo $\rho \to \infty$.

7) Neste item vamos estudar as superfícies geométricas acima e mostrar que são totalmente umbílicas, i. e possuem curvaturas principais iguais (tal como foram definidas em sala de aula) em todos os pontos.
   a) Mostre que os semi-planos verticais em $\mathbb{H}^3$, e as semi-esferas em $\mathbb{H}^3$ ortogonais ao bordo assimptótico são planos totalmente geodésicos. Mostre

que são totalmente umbílicos com curvatura média zero em todos os pontos. Mostre que os planos totalmente geodésicos são "cópias " de $\mathbb{H}^2$ com curvatura de Gauss identicamente igual a $-1$.

b) Mostre que as calotas esféricas em $\mathbb{H}^3$ que fazem ângulo $0 < \theta < \pi/2$ com o bordo assimptótico, e os semi-plano inclinados em $\mathbb{H}^3$ que fazem ângulo $0 < \theta < \pi/2$ com o bordo assimptótico são superfícies equidistantes fazendo ângulo $\alpha$ (constante) com um plano totalmente geodésico. Mostre que são totalmente umbílicos, com curvatura média $H$, satisfazendo $H^2 < 1$. Calcule a curvatura média explicitamente em termos de $\alpha$.

c) Mostre que as esferas menos um ponto em $\mathbb{H}^3$ tangentes à $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ e os planos Euclideanos horiontais são horosferas. Mostre que são totalmente umbílicos com curvatura média $H$ satisfazendo $H^2 = 1$.

d) Mostre que as esferas inteiramente contidas em $\mathbb{H}^3$ são esferas geodésicas. Mostre que são totalmente umbílicas. com curvatura média $H$ satisfazendo $H^2 > 1$. Calcule a curvatura média explicitamente.

e) Em todos os casos anteriores faça um desenho colocando o vetor curvatura média apontando para o sentido correto.

f) Descreva os planos totalmente geodésicos, as superfícies equidistantes, as horosferas e as esfeas geodésicas no modelo da bola.

8) Os *cilindros hiperbólicos* $\mathcal{C}$ ou simplesmente cilindros são definidos como o lugar geométrico dos pontos equidistantes de uma determinada geodésica $\gamma$ de $\mathbb{H}^3$. Mostre que quando $\gamma$ é uma semi-reta Euclideana vertical, $\mathcal{C}$ é um cone Euclideano com vértice no bordo assimptótico de $\mathbb{H}^3$. Estude geometricamnte o caso em que $\gamma$ é um semi-círculo ortogonal à $\partial_\infty \mathbb{H}^3$. Mostre que os cilindros são isoparamétricos, i. e de curvaturas principais constante. Calcule as curvaturas principais em função da distância à $\gamma$.

9) (*Classificação das isometrias positivas de* $\mathbb{H}^3$) Mostre com todos os detalhes que toda isometria positiva de $\mathbb{H}^3$ é a composta de no máximo de uma translação Euclideana horizontal, de uma homotetia e de rotação hiperbólica.

10) Mostre que toda transformação de Möbius de $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ se estende a uma única isometria positiva de $\mathbb{H}^3$. Reciprocamente, mostre que toda isometria positiva de $\mathbb{H}^3$ induz em $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ uma transformação de Möbius.

11) Sejam dados dois planos totalmente geodésicos $\pi_1$, $\pi_2$, e pontos $p \in \pi_1$, $q \in \pi_2$. Sejam dadas duas bases ortornormais positivas de $\mathbb{R}^3$, $\{v_1, w_1, N_1\}$ e $\{v_2, w_2, N_2\}$ tal que $\{v_1, w_1\}$ é uma base de $T_p\pi_1$ e $\{v_2, w_2\}$ é uma base de $T_q\pi_2$. Mostre que existe uma isometria positiva levando $\pi_1$ em $\pi_2$, levando $p$ em $q$ e levando a base $\{v_1, w_1\}$ de $T_p\pi_1$ na base $\{v_2, w_2\}$ de $T_q\pi_2$.

12) Dados $p, q \in \mathbb{H}^3$, dados $\{v_1, w_1, N_1\}$, e $\{v_2, w_2, N_2\}$ bases de $T_p\mathbb{H}^3$ e $T_q\mathbb{H}^3$, respectivamente, dê condições necessárias e suficientes para que exista uma isometria $I$ de $\mathbb{H}^3$, com $I(p) = q$, $dI(p)v_1 = v_2$, e $dI(p)w_1 = w_2$ ?

13) Quais são todas as isometrias de $\mathbb{H}^3$ que deixam uma determinada geodésica $\gamma$ invariante ? Quais as positivas ?

14) O que você pode dizer de uma isometria de $\mathbb{H}^3$ que deixa todos os pontos de um determinado plano totalmente geodésico $\pi$ fixados ? E se colocarmos a condição da isometria ser *positiva* ? O quê você pode dizer de uma isometria de $\mathbb{H}^3$ que deixa todos os pontos de um determinado plano totalmente geodésico $\pi$ fixados e que fixa um ponto $p \notin \pi$ ?

15) Exiba condições " minimais" que implicam que uma determinada isometria de $\mathbb{H}^3$ é a identidade.

16) Como decompor uma translação hiperbólica como a composta de no máximo de uma translação Euclideana horizontal, de uma homotetia e de rotação hiperbólica ? Idem para uma rotação hiperbólica. Idem para a composta de uma inversão (em esferas) e de uma reflexão (em planos) que deixam $\mathbb{H}^3$ invariante.

17) Mostre que toda isometria positiva de $\mathbb{H}^3$ é a composta de um número par de inversões e reflexões como acima.

## BIBLIOGRAFIA

1. Lars Ahlfors. *Conformal invariants: topics in geometric function theory.* McGraw-Hill, 1973.

2. João L. Barbosa, Ricardo Sá Earp. *Prescribed mean curvature hypersurfaces in $H^{n+1}$ with convex planar boundary, II.* Séminaire de théorie spectrale et géométrie de Grénoble, **16**, 43-79, 1998.

3. Alan F. Beardon. *Iteration of rational functions.* Springer, 1999.

4. Lennart Carleson and Theodore W. Gamelin. *Complex dynamics.* Springer, 1993.

5. Manfredo P. do Carmo. *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides, 1998.

6. Wellington de Melo. *Ferramentas matemáticas em dinâmica unidimensional.* Preprint. 2000 ( a ser publicado na Revista Matemática Universitária).

7. Hershel M. Farkas and Irwin Kra. *Riemann Surfaces* . Springer, 1980.

8. R. E Greene e S. G. Krantz. *Function theory of one complex variables.* John Wiley and Sons, N. Y, 1997.

9. Noel J. Hicks. *Notes on differential geometry* . Van Nostrand, 1965.

10. Heinz Hopf. *Differential geometry in the large.* Lecture Notes in Mathematics, **1000**. Springer, 1989.

11. Christian Pommerenke. *Boundary behavior of conformal maps.* Springer, 1992.

12. Murray H. Protter e Hans F. Weinberger. *Maximum principles in differential equations.* Prentice- Hall, 1967.

13. John G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds.* Springer, 1994.

14. Ricardo Sá Earp et Eric Toubiana. *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann.* Diderot multimedia, 1997.

15. Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry* , second edition. Publish or Perish, 1979.

16. William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology.* Edited by Silvio Levy, Princeton University Press, 1997.