GEOMETRIA HIPERBÓLICA -2000.2–Lista8

Professor: Ricardo Sá Earp

Vamos tratar das curvas em superfícies de $\mathbb{R}^3$. O leitor está aconselhado a fazer as devidas analogias com curvas em superfícies de $\mathbb{H}^3$. Seja S uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$ orientada por um campo de vetores normais unitários N. Seja γ uma curva regular *em* S parametrizada pelo comprimento de arco s. Seja $\gamma''(s)$ o vetor aceleração (ou curvatura) da curva γ em $\mathbb{R}^3$. *A componente tangencial* de $\gamma''(s)$, denotada por

$$\frac{\mathrm{D}\gamma'(s)}{\mathrm{d}s}$$

é chamada de *vetor curvatura da curva* γ *em* S.

Lembremos que uma curva regular γ na superfície orientada S admite um vetor canônico normal unitário η ao longo de γ definido como segue: Seja η o campo normal unitário ao longo de γ de modo que $\{\gamma'(s), \eta(s)\}$ (nesta ordem) determina a orientação de $T_{\gamma(s)}S$, do plano tangente à S em $\gamma(s)$. Ou seja $\nu(s) := N(\gamma(s))$ está dado por

$$\nu(s) = \gamma'(s) \times \eta(s)$$

A *curvatura geodésica*, denotada por k_g, está definida como sendo a componente do vetor curvatura na direção η pela fórmula

$$\frac{\mathrm{D}\gamma'(s)}{\mathrm{d}s} = k_g(s)\eta(s)$$

Note que $\dfrac{\mathrm{D}\gamma'(s)}{\mathrm{d}s} \cdot \gamma'(s) = 0$.

1) Mostre que a curvatura normal k_N, a curvatura geodésica k_g e a curvatura da curva k de γ satisfazem

$$k^2 = k_n^2 + k_g^2$$

   a) Verifique a fórmula acima num paralelo da esfera $\mathbb{S}^2$.

Suponha que $\gamma(0) = p \in S$ e que $\gamma'(0) = v \in T_pS$.

b) Mostre que se v é um vetor assimptótico, então ou a curvatura k de γ se anula em $s = 0$ ou $\boldsymbol{n}$ é ortogonal à $N(p)$, onde $\boldsymbol{n}$ é o unitário na direção de $\gamma''(s)$.

c) Mostre que se uma curva regular γ não é parametrizada pelo comprimento de arco então

$$k_N(t) = \frac{II(\gamma'(t), \gamma'(t))}{|\gamma'(t)|^2}$$

Vamos agora considerar o referencial de Darboux em vez do mais conhecido referencial de Frenet: Dada γ uma curva em S parametrizada pelo comprimento de arco s considere

$$T(s) = \gamma'(s), \qquad \eta(s), \qquad \nu(s) = T(s) \times \eta(s) = N(\gamma(s))$$

De fato, observe que

$$\nu'(0) = \frac{DN(\gamma(s))}{\mathrm{d}s} \qquad \text{em} \quad s = 0$$

2) Mostre que existe uma função $\tau_g(s)$, chamada de torção geodésica, tal que

$$\begin{aligned} T'(s) &= \quad k_g\eta + k_N\nu \\ \eta'(s) &= -k_gT \qquad\quad + \tau_g\nu \\ \nu'(s) &= -k_NT - \tau_g\eta \end{aligned}$$

Note que como $\nu'(0)$ depende apenas de $T(0)$, a terceira equação acima mostra que K_N (o que já sabíamos de antemão) e τ_g dependem apenas de T; podemos escrever que $k_N = k_N(v)$ e $\tau_g = \tau_g(v)$, para v unitário tangente.

a) Deduza das equações acima que se $\{v, w\}$, $v = \gamma'(0)$, é uma base ortornormal, positivamente orientada, de T_pS então

$$\begin{aligned} k_N(v) &= -D_pN(v) \cdot v = II(v, v) \\ \tau_g(v) &= -D_pN(v) \cdot w = II(v, w) \end{aligned}$$

Aproveite o ensejo para re-demonstrar a relação de Euler

b) Mostre que se $e_1, e_2 \in T_pS$ são direções principais com $\{e_1, e_2\}$ uma base ortornormal positivamente orientada, se θ é o ângulo orientado que o vetor unitário v, à partir de e_1, faz com e_1, então

$$k_N(v) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$$

onde k_1, k_2 são as curvaturas principais de S em p.

c) Com as notações do item b) logo acima mostre que

$$\tau_g(v) = (k_2 - k_1)\sin\theta\cos\theta$$

Sugestão : Considere a equação obtida acima no item a) $\tau_g(v) = -D_pN(v)\cdot w = II(v, w)$.

d) Deduza que γ é uma linha de curvatura, sse $\tau_g = 0$.

Dizemos que γ é uma *geodésica* se

$$\frac{\mathrm{D}\,\gamma'(s)}{\mathrm{d}s} \equiv 0$$

Segue das propriedades das geodésicas como veremos brevemente, a definição geométrica alternativa:" Geodésicas são curvas que minimizam localmente o comprimento de arco", como já vimos explicitamente no modelo da esfera $\mathbb{S}^2$ $(K = 1)$ e no modelo do plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$.

e) Mostre que γ é uma geodésica, sse $k_g = 0$. (ou ainda, sse, $\boldsymbol{n}$ quando definido é ortogonal à S.)

i) Mostre que os meridianos de uma superfície de revolução são geodésicas. Quais as condições para que um paralelo seja uma geodésica ? Dê condições analíticas e geométricas.

ii) Determine todas as geodésicas no cilindro circular reto, tanto de um ponto de vista analítico quanto de um ponto de vista geométrico. Aproveite o ensejo e determine o tipo conforme do cilindro circular reto e do semi-cilindro circular reto. Encontre ou descreva um cilindro topologicamente equivalente ao cilindro circular reto, mas que não seja conformemente equivalente a este.

iii) Mostre que uma geodésica plana que não seja uma reta é uma linha de curvatura.

iv) Mostre que uma geodésica que é linha de curvatura é uma curva plana.

3) Mostre que uma reta numa superfície S é uma linha assimptótica; conclua que a curvatura de Gauss satisfaz $K \leqslant 0$ ao longo de qualquer reta contida em S. Mostre que $K = 0$ ao longo da reta, sse o normal N é constante ao longo da reta.

4) Mostre o teorema de Beltrami-Enneper: Se γ é uma curva assimptótica com $\gamma(0) = p$ e $k(0) \neq 0$, então

$$|\tau(0)| = \sqrt{-K(p)}$$

além disso, mostre que se $k(p) < 0$, e as duas curvas asimptóticas distintas em p têm curvatura diferente de zero em p, então suas torções em p são iguais e de sinais contrários. *Sugestão* : Parametrize γ pelo comprimento de arco. Mostre que $\boldsymbol{n}$ é tangente à S em p, e assim $N = \boldsymbol{b} = T \times \boldsymbol{n}$. Mostre que

$$-DN(T(s)) = -\boldsymbol{b}'(s) = -\tau(s) \cdot \boldsymbol{n}$$

Veja que a matriz do operador de Weingarten $-DN : T_pS \to T_pS$ com respeito a base ortornormal $\{T(0), \boldsymbol{n}(0)\}$ deve ter zero na diagonal principal e $-\tau(0)$ na outra diagonal. Conclua que $K(p) = -\tau(0)^2$. Para completar a demonstração (e re-obter a fórmula pedida) use a relação de Euler obtida no item 2) b) e a fórmula obtida no item 2) c) .

5) Demonstre o seguinte *teorema de Terquem-Joachimsthal*:

a) Se γ é uma curva na interseção de duas superfícies S_1, S_2 que é uma linha de curvatura de S_1; então γ é uma linha de curvatura de S_2, sse S_1 e S_2 se interceptam num ângulo constante ao longo de γ.

   i) Aplique o teorema para demonstrar que os meridianos são linhas de curvatura de uma superfície de revolução .

   ii) Aplique o teorema para mostrar que γ é uma linha de curvatura plana de S, sse a imagem esférica pela aplicação normal de Gauss $N \circ \gamma$ descreve uma circunferência.

Agora vamos tratar de propriedades geométricas de certas superfícies de $\mathbb{R}^3$.

6) Considere as superfícies abaixo:

a) Estude o comportamento da curvatura de Gauss K quando $x^2+y^2 \to \infty$: $z = \dfrac{x}{x^2+y^2+2}$

b) (*sela de macaco*) Calcule os coeficientes da segunda forma fundamental e mostre que a curvatura média e de Gauss se anulam na origem: $z = x^3 - 3xy^2$

c) (*pseudo-esfera*) Considere S, a superfície (*pseudo-esfera*) obtida pela revolução da parte da *tractrix* contida no primeiro quadrante aberto, em torno do eixo-y. Mostre que a curvatura de Gauss K de S é identicamente igual a -1.

7) Investigue e classifique as superfícies de revolução de curvatura de Gauss $K \equiv +1$, fazendo uma análise geométrica de suas curvas geratrizes.

8) Considere a (*superfície mínima de Enneper*)

$$X(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right) \;\; u, v \in \mathbb{R}.$$

a) Mostre que os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por $E = G = (1+u^2+v^2)^2,\ F = 0$, e mostre que Enneper é completa.

b) Mostre que a superfície mínima de Enneper é globalmente conforme a $\mathbb{C}$, logo simplesmente conexa.

c) Calcule os coeficientes da segunda forma fundamental de Enneper.

d) Mostre que a superfície mínima de Enneper é de fato mínima, isto é de curvatura média $H = 0$.

e) Você saberia mostrar que as linhas de curvatura de Enneper são curvas planas ?

9) Mostre que o helicóide (veja item 10) logo abaixo) é globalment conforme a $\mathbb{C}$.

a) Mostre que as linhas coordenadas do helicóide são linhas assimptóticas. Mostre que as linhas assimptóticas do helicóide são retas e hélices circulares. Será que as linhas coordenadas são geodésicas ? Estude o comportamento do normal unitário N ao helicóide ao longo das retas.

b) Mostre que o helicóide é uma superfície mínima.

c) Calcule a curvatura de Gauss do helicóide.

d) Mostre que as linhas de curvatura do helicóide são hélices logarítmicas.

10) Considere a *família catenóide-helicóide*, denotada $\mathcal{F}_\theta$. abaixo (Você não precisa fazer os itens feitos por você num lista anterior).

$$\mathcal{Z}_\theta = \cos\theta \cdot \mathcal{C}(u,v) + \sin\theta \cdot \mathcal{H}(u,v) \qquad \theta \in [0, 2\pi)$$

onde $\mathcal{C}(u,v) = (a\cosh v \cos u, a\cosh v \sin u, av)$ e
$\mathcal{H}(u,v) = (-a\sinh v \sin u, a\sinh v \cos u, -au)$, $0 < u < 2\pi$, $\quad -\infty < v < \infty$, são parametrizações (locais) do catenóide e do helicóide, respectivamente (Explique isto !).

a) Mostre que $\mathcal{F}_\theta$ é uma família a 1-parâmetro de superfícies helicoidais cujo passo depende de θ (Claro que para $\theta = 0$ obtemos o catenóide), ligando uma parte do catenóide à uma parte do helicóide.

b) Mostre $\mathcal{F}_\theta$ é uma família a 1-parâmetro de superfícies *mínimas* isométricas, ligando uma parte do catenóide à uma parte do helicóide. Dizemos que $\mathcal{Z}_\theta$, $\theta \in (0, 2\pi)$ é uma *superfície associada* ao catenóide (helicóide).

c) Conclua que o catenóide e o helicóide são localmente isométricos e, por uma isometria local, geodésicas no catenóide são levadas em geodésicas no helicóide (Veja figuras no livro do prof. Manfredo, ou desenhe-as usando o Maple ou o Mathematica).

d) Mostre que as linhas assimptóticas do catenóide são hélices logarítmicas.

11) Calcule a primeira e segunda forma fundamental das superfícies parametrizadas $X(u,v)$ abaixo. Identifique as superfícies.

a) $x = a\sin u \cos v$, $\quad y = b\sin u \sin v$, $\quad z = c\cos u$, $\ a > b > c > 0$.

b) $x = a\sinh u \cos v$, $\quad y = b\sinh u \sin v$, $\quad z = c\cosh u$, $\ a > b > c > 0$.

c) $x = a\sinh u \sinh v$, $\quad y = b\sinh u \cosh v$, $\quad z = c\sinh u$, $\ a > b > c > 0$.

d) $x = au\cos v$, $\quad y = bu\sin v$, $\quad z = u^2$, $\ a > b > 0$.

e) $x = au\cosh v$, $\quad y = bu\sinh v$, $\quad z = u^2$, $\ a > b > 0$

Verifique as propriedades geométricas estudadas nesta lista que são válidas para superfícies do espaço hiperbólico.

BIBLIOGRAFIA

1. M. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1976 (**livro texto**).

2. N. J. Hicks *Notes on differential geometry* . Van Nostrand, 1965.

3. H. Hopf *Differential Geometry in the large* . Lecture notes in mathematics, **1000**, Springer, 1989.

4. R. Osserman. *A survey of minimal surfaces.* Dover Public., N. Y., 1986.

5. F. Pécastaings et J. Sevin. *Chemins vers la géométrie* . Mathématiques supérieures. Premier cycle universitaire. Vuibert, 1981.

6. M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry* vol. 3, second edition. Publish or Perish, 1979.

7. D. Struik. *Lectures on classical differential geometry.* Addison-Wesley, 1950 .

8. Paulo Ventura Araújo. *Geometria Diferencial.* Coleção matemática universitária. CNpq-IMPA, 1998.

9. *Courbes Mathématiques.* Revue du Palais de la Découverte, No 45, 1995.