EXAME 1 DE GEOMETRIA RIEMANNIANA 2007

PROFESSOR RICARDO SA EARP

(1) (**ponto extra**) Defina e classifique *todos* os planos totalmente geodésicos de $\mathbb{H}^3$. OBS: A sua definição deve ser geral, ou seja, que se aplica a uma variedade ambiente qualquer de dimensão 3.

(2) (**0.5 pt**) Defina e exemplifique os conceitos de esferas de raio ρ, superfícies equidistantes e horosferas em $\mathbb{H}^3$.

(3) (**0.5 pt**) Defina o conceito de *inversão* ou reflexão com respeito a um plano totalmente geodésico de $\mathbb{H}^3$ *geometricamente*, sem fazer uso de fórmulas.

(4) Vamos considerar uma isometria *positiva* de $\mathbb{H}^3$ que deixa uma geodésica γ globalmente fixa (invariante).

  (a) (**1 pt**) Determine precisa e geometricamente todas tais isometrias.

  (b) (**1 pt**) Mostre que tais isometrias são compostas de inversões com respeito a planos totalmente geodésicos, determinando precisamente todas as possibilidades destas inversões.

(5) A finalidade deste exercício é de estabelecer nos "space form" $\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n$ (as métricas são as canônicas), as *coordenadas geodésicas polares*

  (a) (**0.5 pt**) Estabeleça um difeomorfismo (precise a diferenciabilidade)
  $f_0 : (0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, de maneira que a métrica g_0 em $(0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$, se escreve da forma

$$\boxed{g_0 = dr^2 + r^2\, ds^2_{n-1}}$$

  onde $r \in (0, \infty)$, e ds^2_{n-1} é a métrica canônica de $\mathbb{S}^{n-1}$.

  (b) (**1 pt**) Estabeleça um difeomorfismo (precise a diferenciabilidade)
  $f_1 : (0, \pi) \times \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{(0, \ldots, 1), (0, \ldots, -1)\}$, de maneira que a métrica g_1 em $(0, \pi) \times \mathbb{S}^{n-1}$, se escreve da forma

$$\boxed{g_1 = dr^2 + \sin^2 r\, ds^2_{n-1}}$$

  onde $r \in (0, \pi)$, e ds^2_{n-1} é a métrica canônica de $\mathbb{S}^{n-1}$.

(c) (**1 pt**) Estabeleça um difeomorfismo (precise a diferenciabilidade)
$f_{-1} : (0,\infty)\times\mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{H}^n \setminus \{(0,\ldots,1)\}$, (modelo do semi-espaço. Você pode escolher outro modelo) de maneira que a métrica g_{-1} em $(0,\infty)\times\mathbb{S}^{n-1}$, se escreve da forma

$$\boxed{g_{-1} = dr^2 + \sinh^2 r \, ds^2_{n-1}}$$

onde $r \in (0,\infty)$, e ds^2_{n-1} é a métrica canônica de $\mathbb{S}^{n-1}$.

(d) (**0.5 pt**) Aplique a fórmula acima para estabelecer a área de uma esfera (geodésica) $S_\varepsilon(p)$ de raio ρ em $\mathbb{H}^3$ (lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância ρ de um ponto p (centro)).

(e) (**0.5 pt**) Aplique a fórmula acima para estabelecer o crescimento de uma bola (geodésica) $B_\varepsilon(p)$ de raio ρ em $\mathbb{H}^3$ (lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância $\leqslant \rho$ de um ponto p (centro)).

(6) Lembre que (com a identificação do espaço de Heisenberg Nil_3 com o espaço Euclideano $\mathbb{R}^3$), dada pela parametrização global usando a aplicação exponencial, o produto de
$X_1 = (x_1, y_1, t_1)$ e $X_2 = (x_2, y_2, t_2)$ no espaço de Heisenberg está dado por

$$(x_1, y_1, t_1)*(x_2, y_2, t_2) = \left(x_1 + x_2, y_1 + y_2, t_1 + t_2 + \frac{x_1 y_2}{2} - \frac{x_2 y_1}{2}\right).$$

Lembre ainda que a álgebra de Lie, em termos da base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ está dada por $[e_1, e_2] = e_3$, e $[e_i, e_3] = 0, i = 1, 2$. Uma base dos campos de vetores invariantes à esquerda, em coordenadas exponenciais, está dada por $E_1 = \dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{y}{2}\dfrac{\partial}{\partial t}$, $E_2 = \dfrac{\partial}{\partial y} + \dfrac{x}{2}\dfrac{\partial}{\partial t}$ e $E_3 = \dfrac{\partial}{\partial t}$.

E_1, E_2 são chamados de *campos horizontais* e E_3 é chamado de *campo vertical*.

A métrica no espaço de Heisenberg Nil_3 (identificado c/ $\mathbb{R}^3$), *invariante à esquerda*, está definida impondo que $\{e_1, e_2, e_3\}$, seja uma base ortornormal na identidade e que $\{E_1, E_2, E_3\}$, constitua uma base ortornormal de campos invariantes à esquerda.

Lembre que que a expressão desta métrica (Heisenberg visto como $\mathbb{R}^3$, usando coordenadas exponenciais) está dada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{1}{2} y dx - \frac{1}{2} x dy + dt\right)^2$$

Defina as translações $L_{(t,0,0)}$, $L_{(0,t,0)}$ e $L_{(0,0,t)}$ por

$$L_{(t,0,0)}(x,y,z) = (t,0,0)*(x,y,z)(\text{translação horizontal (à esquerda) })$$
$$L_{(0,t,0)}(x,y,z) = (0,t,0)*(x,y,z)(\text{translação horizontal (à esquerda)})$$
$$L_{(0,0,t)}(x,y,z) = (0,0,t)*(x,y,z)(\text{translação vertical (à esquerda)})$$

(a) (**0.5 pt**) Explicite tais translações, mostrando que os campos de Killing geradores de tais translações (seus fluxos agem por isometrias), são campos invariantes à direita.
(b) (**ponto extra**) Mostre que cada campo de Killing X acima satisfaze a equação de Killing, $\langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle \nabla_Z X, Y\rangle = 0$ para todo $Y, Z \in \mathcal{X}(\mathrm{Nil}_3)$, onde ∇ é a conexão Riemaniana de Nil_3.
(c) (**1 pt**) Mostre que a composta de uma translação horizontal com uma translação vertical em Nil_3 é uma translação horizontal em Nil_3.
(d) (**1 pt**) Exiba um grupo a 1-parâmetro de isometrias positivas de Nil_3 que não está relacionado acima.
(e) (**ponto extra**) Mostre que

$$\begin{array}{lll}
\nabla_{E_1} E_1 = 0 & \nabla_{E_2} E_1 = -\dfrac{\partial}{2\partial t} & \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} E_1 = -\dfrac{1}{2} E_2 \\
\nabla_{E_1} E_2 = \dfrac{\partial}{2\partial t} & \nabla_{E_2} E_2 = 0 & \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} E_2 = \dfrac{1}{2} E_1 \\
\nabla_{E_1} \dfrac{\partial}{\partial t} = -\dfrac{1}{2} E_2 & \nabla_{E_2} \dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{1}{2} E_1 & \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \dfrac{\partial}{\partial t} = 0
\end{array}$$

Sugestão: Demonstre antes que $[E_1, E_2] = \frac{\partial}{\partial t}, [E_1, \frac{\partial}{\partial t}] = 0, [E_1, \frac{\partial}{\partial t}] = 0.$

(7) (**1 pt**) Classifique todas as isometrias positivas do espaço produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ que são oriundas de $\mathbb{H}^2$, fazendo um detalhamento geométrico.
(8) (**ponto extra**) Defina o conceito de *gráfico vertical* em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, e dê o normal unitário N a tal gráfico.