

LISTA 1 DE GEOMETRIA RIEMANNIANA 2007

RICARDO SA EARP

- (1) Seja M e N variedades de dimensão n e p , respectivamente.
 - (a) Mostre que o produto $M \times N$ é uma variedade de dimensão $n + p$, e que as projeções $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$, $\pi_2 : M \times N \rightarrow N$ são submersões.
 - (b) Seja S^1 o círculo unitário em \mathbb{R}^2 munido da estrutura diferenciável como subvariedade de dimensão 1. Explícite a estrutura diferenciável de S^1 .
 - (c) Considere \mathbb{Z}^n o grupo das translações inteiras de \mathbb{R}^n agindo em \mathbb{R}^n da forma usual: Se $g = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ então $g \cdot x = (x_1 + k_1, \dots, x_n + k_n)$. Mostre que \mathbb{Z}^n age própria e descontinuamente em \mathbb{R}^n e conclua que $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ é uma variedade de dimensão n (faça desenhos para $n = 2$). Mostre que a aplicação quociente $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/G$ é um recobrimento, concluindo que é uma submersão.
 - (d) Mostre que o toro de revolução, o toro $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ do item anterior e o produto $S^1 \times S^1$ são difeomorfos (chamados de 2-toro T^2).
 - (e) Mostre que $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ é difeomorfo ao espaço produto $S^1 \times \dots \times S^1$ (n vezes), chamados de n -toro T^n .
- (2) Exiba exemplos variados de subvariedades de dimensão n e de codimensão k de uma variedade de dimensão $n + k$.
- (3) Dê todos os detalhes (dando explicitamente as cartas) que o espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$ é uma variedade de dimensão real $2n$. Mostre que a esfera unitária S^{2n+1} fibra sobre $\mathbb{C}P^n$ com fibra S^1 , ou seja a aplicação quociente $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ é uma fibração (logo uma submersão) com fibra S^1 (chamada de *fibração de Hopf*).
- (4) Dê exemplos não triviais, desenvolvendo os detalhes, de subvariedades obtidas como imagem inversa de um valor regular.
- (5) Neste item você terá que estudar formas diferenciais e fazer uma pesquisa sobre o *teorema de Frobenius* tanto *via campos* quanto *via formas*. Enuncie o teorema. As referências são as seguintes:

- César Camacho & Alcides Lins Neto. *Teoria geométrica das folheações*. Projeto Euclides, 1979
- Noel J. Hicks. *Notes in differential geometry*. Van Nostrand, 1965
- M. Sivak. *Differential Geometry*. Vol I, Publish or Perish, 1999 (a melhor referência).
- Frank W. Warner. *Foundations of differential manifolds and Lie Groups*. Springer, 1983.

De qualquer maneira, vamos fazer uma nota sobre certos aspectos do teorema de Frobenius. Consulte as referências citadas.

* * *

NOTA:

Seja $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ campos de classe C^1

definidos num aberto U de \mathbb{R}^n . Lembre que o colchete de Lie de X e Y está definido por

$$[X, Y] := \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Dizemos que uma distribuição \mathcal{P} de k -planos de classe C^1 em \mathbb{R}^n é integrável se existe uma folheação \mathcal{F} de dimensão k tangente a \mathcal{P} . Um fato é que uma distribuição de k planos pode ser definida localmente como sendo o núcleo de $n - k$ formas independentes, ou seja dada pelas equações $\omega_{k+1} = 0, \dots, \omega_n = 0$, onde $\omega_{k+1}, \dots, \omega_n$, são 1-formas de classe C^1 linearmente independentes.

Sabemos que \mathcal{P} é integrável se e somente se

$$d\omega_j \wedge \omega_{k+1} \wedge \dots \wedge \omega_n = 0, \quad j = k = 1, \dots, n$$

Dizemos que \mathcal{P} é involutivo se dados campos X e Y tangentes a \mathcal{P} então o colchete $[X, Y]$ também é tangente a \mathcal{P} .

A versão geométrica do teorema de Frobenius diz que \mathcal{P} é integrável se e somente se é involutivo.

Uma outra maneira de ver o Teorema de Frobenius é via a equivalência: \mathcal{P} é integrável, se e somente se o ideal \mathcal{I} das formas diferenciais que anulam a distribuição \mathcal{P} é fechado com respeito a diferenciação exterior, i.e $d(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$. Diz-se que neste caso \mathcal{I} é um ideal diferencial.

- (6) Determine o campo de planos de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ dado pelas 1-formas diferenciais abaixo.

(a)

$$\omega = x dx + y dy + z dz = 0$$

(b)

$$\omega = x dx + y dy - z dz = 0$$

(c) Determine se as 1-formas do item a) são integráveis e obtenha as superfícies integrais. Use o MAPLE para exibir um gráfico que desenhe as folheações determinadas .

(d) Faça um estudo análogo ao que foi feito anteriormente com respeito a 1-forma diferencial em $\mathbb{R}^3 \setminus \text{eixo } z$ dada por

$$\omega = y dx - 2x dy$$

(e) Determine as singularidades das folheações em \mathbb{R}^3 dadas nos itens anteriores.

* * *

(7) Mostre que a variedade homogênea $U(n, \mathbb{C})/U(n-1, \mathbb{C})$ é difeomorfa à esfera unitária S^{2n-1} . Particularize, no caso $n = 2$.

(8) Mostre que o espaço homogêneo $SU(n, \mathbb{C})/U(n-1, \mathbb{C})$ é difeomorfo ao espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$ e o difeomorfismo é dado por $g \cdot U(n-1) \mapsto \{g(e_n)\}$, onde $\{g(e_n)\}$ denota o ponto de $\mathbb{C}P^{n-1}$ determinado por $g(e_n)$, $g \in SU(n, \mathbb{C})$. Confira as dimensões.