

LISTA 10 DE GEOMETRIA RIEMANNIANA 2007

RICARDO SA EARP

- (1) Considere o modelo do semi-espaço superior do espaço hiperbólico space \mathbb{H}^{n+1} , $\{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, x_n > 0\}$, munido da métrica $ds^2 = \frac{1}{x_n^2} \sum_{i=0}^n dx_i^2$. Seja $\bar{D}_X Y$, a derivada covariante associada à métrica Euclideana, e seja $\bar{\nabla}_X Y$ a conexão associada à métrica hiperbolica. Deduza que:

$$\langle Z, \bar{\nabla}_Y X \rangle = (1/x_n^2) Z \cdot \bar{D}_Y X + (1/x_n^3) (-X[x_n]Y \cdot Z - Y[x_n]Z \cdot X + Z[x_n]X \cdot Y)$$

- (a) Calcule os símbolos de Christoffel de \mathbb{H}^{n+1} . Particularize para $n = 1, 2$, fazendo os cálculos nestes casos diretamente, usando simetria e compatibilidade.
- (b) Deduza que, em \mathbb{H}^2 , as curvas equidistantes têm curvatura (geométrica) entre 0 e 1, os horociclos têm curvatura (geométrica) 1 e que os círculos hiperbólicos têm curvatura (geométrica) > 1 , exibindo fórmulas explícitas em cada caso.
- (c) Calcule a curvatura média das superfícies equidistantes, das horosferas e das esferas em \mathbb{H}^3 .
- (d) Defina o conceito de *cilindro* em \mathbb{H}^3 , classificando todos os exemplos. Calcule a curvatura média do cilindro.
- (e) Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, uma curva parametrizada por comprimento de arco (hiperbólico). Seja κ_N a curvatura normal de α com respeito à N . Reparametrizando α pelo parâmetro comprimento de arco euclideano (visto M como hipersuperfície de \mathbb{R}^{n+1}), obtemos uma curva β . Considere a curvatura normal k_N de β com respeito ao campo de vetores N unitários (na métrica euclideana) normal à M . Mostre a seguinte relação:

$$\kappa_N = k_N x_n + N_n$$

onde N_n representa a última componente de N .

Conclua que se H é a curvatura media hiperbólica e h é a curvatura média Euclideana tem-se que $H = h x_n + N_n$.

- (f) Deduza à partir da fórmula anterior a *equação da curvatura média pré-determinada* H de um *gráfico horizontal* dado por uma função $x_0 = u(x_1, \dots, x_n)$ definida sobre um domínio $\mathcal{D} \subset \mathcal{P} := \{x_0 = 0\}$. A equação é a seguinte:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{W(u)} \right) = \frac{n}{x_n} \left(H + \frac{u_n}{W(u)} \right)$$

onde $W(u) = \sqrt{1 + |\nabla(u)|^2}$, sendo que ∇ e div , representam o gradiente e a divergência Euclidianos respectivamente. Investigue e classifique a equação,, segundo a teoria das E.D.P's de segunda ordem.

- (g) Idem para a equação da curvatura média pré-determinada H de um *gráfico vertical* dado por uma função $x_n = u(x_0, \dots, x_{n-1})$ definida sobre um domínio $\Omega \subset \partial_\infty \mathbb{H}^{n+1}$. Agora, a equação é a seguinte.

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{W(u)} \right) = \frac{n}{u} \left(H - \frac{1}{W(u)} \right)$$

Investigue e classifique a equação, segundo a teoria das E.D.P's de segunda ordem.

- (h) Calcule a curvatura média \mathbf{H} da *superfície de Poleni* em \mathbb{H}^3 , dada na Lista 6, deduzindo que é igual a 1.
- (2) Obtenha uma fórmula análoga (ao do exercício anterior) que relacione as conexões Riemannianas ∇ e $\tilde{\nabla}$, associadas a duas métricas conformes g e \tilde{g} , sendo $\tilde{g} = e^u g$, definidas numa variedade M , onde $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave.
- (3) Considere o modelo do semi-espço do espço hiperbólico $\mathbb{H}^3 = \{(u, v, w), w > 0\}$. No plano vw considere novas coordenadas x, y definidas da seguinte maneira: Seja c o semi-círculo centrado na origem e de raio 1 (que é uma geodésica do plano vw munido com a métrica hiperbólica). Seja $p = (v, w)$. Considere γ_1 a única geodésica do plano hiperbólico vw que passa por p e é ortogonal a c , interceptando c em p_1 . Seja γ_2 a única geodésica que passa por p e é ortogonal ao eixo w , cortando-o em p_2 (que também é uma geodésica). Então $x = \operatorname{dist}(p_1, (0, 0, 1))$ (orientada) e $y = \operatorname{dist}(p_2, (0, 0, 1))$ (orientada), de modo que $x \geq 0 \iff v \geq 0$ e $y \geq 0 \iff w \geq 1$. Agora considere novas coordenadas x, y, z de \mathbb{H}^3 , onde se $\bar{p} = (u, v, w)$ então

$z := \text{dist}(\bar{p}, \text{plano } vw)$ e $z \geq 0 \iff u \geq 0$. Mostre que

$$u = \exp y \tanh z \sqrt{1 - \tanh^2 x \cosh^2 y}$$

$$v = \exp y \tanh x \cosh y$$

$$w = \exp y \text{sech } z \sqrt{1 - \tanh^2 x \cosh^2 y}$$

- (4) Considere o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3 = \{(X = x_1, x_2, x_3); x_3 > 0\}$. Considere o setor próprio aberto S_θ contido em $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ cujo vértice é o ponto $(-1, 0, 0)$ e cuja reta mediana é o raio $[-1, +\infty]$ contido no eixo real x_1 , i.e $S_\theta = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{-\theta}{2} < \arg(p+1) < \frac{\theta}{2}\}$. Considere a seguinte curva γ de classe C^2 no plano $\Pi := \{x_1 = 0\}$, dada por $\gamma(t) := (0, r \cos t, a + r \sin t)$, $t \in (0, \pi)$, onde $a, r > 0$. Suponhamos que r é escolhido suficientemente grande de modo que os pontos $\pm(0, r, 0) \notin \bar{S}_\theta$. A imagem de γ é o semi-círculo Γ de raio r . Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{H}^3$ o cone euclidiano sobre Γ com respeito ao ponto $q = (-1, 0, 0)$. Isto é $\mathcal{C} = \cup_{\lambda > 0} h_{q,\lambda}(\Gamma)$, onde $h_{q,\lambda}(X) = \lambda \cdot (X + (1, 0, 0)) + (-1, 0, 0)$, para todo $\lambda > 0$ e todo $X \in \mathbb{H}^3 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^3$. Mostre que \mathcal{C} é uma superfície de classe C^2 , e que é o gráfico de uma função ϕ definida num setor contendo S_θ no seu interior. Mostre que a curvatura média euclidiana H de \mathcal{C} , calculada com respeito à orientação normal no sentido crescente dos $z = x_3$, é dada na parametrização natural de \mathcal{C} por

$$H(t, \lambda) = -\frac{1 + r^2 + 2ar \sin t + a^2}{2\lambda r \left(1 + (r + a \sin t)^2\right)^{3/2}}$$

além disso, mostre que a curvatura média hiperbólica \mathbf{H} de \mathcal{C} calculada também com respeito à orientação normal no sentido crescente dos $z = x_3$, satisfaz $\mathbf{H} < 0$ se e somente se

$$2r \sin t (1 + (r + a \sin t)^2) < (a + r \sin t)(1 + r^2 + 2ar \sin t + a^2)$$

- (5) Considere a faixa $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < y < 1\}$. Considere o semi-plano vertical $\Pi = \{x = 0\}$ em \mathbb{H}^3 . seja $\gamma(t) = (0, y(t), z(t))$, $t \in (0, 1)$ uma curva regular parametrizada cujo traço Γ está em Π . Suponhamos que $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = -1$ e $\lim_{t \rightarrow 1} y(t) = 1$. Seja M a superfície obtida fazendo Γ sofrer sucessivas translações horizontais. Isto é $M = \cup_{x \in \mathbf{R}} T_x(\Gamma)$, onde $T_x(X) := X + (x, 0, 0)$, $\forall X \in \mathbb{H}^3$.

- (a) Exiba a parametrização natural de M e mostre que a curvatura média euclídeana H de M com respeito ao normal unitário $N = \frac{1}{\sqrt{y'^2 + z'^2}} \cdot (0, -z'(t), y'(t))$ é dada por

$$H(t, x) = H(t) = \frac{z'' y' - z' y''}{2(y'^2 + z'^2)^{3/2}}(t)$$

- (b) Mostre que a curvatura média hiperbólica \mathbf{H} de M é identicamente nula se e somente se

$$z'' y' - z' y'' = -2 \frac{y'(y'^2 + z'^2)}{z}$$

- Além disto se Γ é um gráfico com respeito a y , mostre que
- (c)

$$\mathbf{H} \equiv 0 \iff z'' = -2 \frac{(1 + z'^2)}{z}$$

- (6) Consideremos o modelo da bola tridimensional do espaço hiperbólico dado por $B = \{(u, v, w) \in \mathfrak{R}^3 \mid u^2 + v^2 + w^2 < 1\}$. Considere uma superfície de revolução gerada por uma curva c contida no disco aberto $D = \{(u, v, w) \in B \mid w = 0\}$. Seja $p \in D$, seja γ a única geodésica passando por p e ortogonal à geodésica horizontal $\{v = 0\}$. Seja q a intersecção entre estas duas geodésicas. Então x é igual 'a distância hiperbólica entre q e 0 , e y é o comprimento orientado de γ entre p e q . Isto significa que $x \geq 0$ (resp. $y \geq 0$) $\Leftrightarrow u \geq 0$ (resp. $v \geq 0$), onde (u, v) são as coordenadas euclídeanas de p . Mostre que
- (a) A métrica de D neste sistema de coordenadas (x, y) é dada por $ds^2 = \cosh^2(y)dx^2 + dy^2$.
- (b) Sejam e_x e e_y os campos de vetores unitários na direção de x e y , respectivamente. Seja $t(s)$ o campo unitário tangente à c no sentido do movimento (s parâmetro comprimento de arco). Seja $n(s)$ o normal unitário apontando para o sentido dos y crescentes. Seja α o ângulo orientado de $t(s)$

à e_y . Faça uma figura !!. Mostre as seguintes relações

$$e_x = \frac{1}{\cosh y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\sin \alpha = \cosh y \cdot \frac{dx}{ds}, \quad \cos \alpha = \frac{dy}{dx}$$

$$n(s) = -\cos \alpha e_x + \sin \alpha e_y$$

$$\frac{d}{dn} = \frac{-\cos \alpha}{\cosh y} \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\dot{c} = \frac{\sin \alpha}{\cosh y} \frac{\partial}{\partial x} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial y}$$

- (c) Suponha que $f(s, t)$, $a \leq s \leq b$, $0 \leq t < \delta$ seja uma dada variação própria de $c(s)$, i.e, $f(s, 0) = c(s)$ e $f(a, t) = c(a)$, $f(b, t) = c(b)$. Seja $g := \cosh y$.
- (d) Mostre que o campo variacional é dado por $V(s) = g \cdot (\partial x / \partial t)_0 e_x + (\partial y / \partial t)_0 e_y$ ($g = \cosh y$).
- (e) Mostre que a fórmula da primeira variação fica

$$\frac{d}{dt} L_c(t)|_{t=0} = - \int_a^b \left\{ \left(2gg' \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dx}{ds} + g^2 \frac{d^2 x}{ds^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_0 + \left(\frac{d^2 y}{ds^2} - gg' \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_0 \right\} ds$$

- (f) Conclua à partir da fórmula da primeira variação que esta determina a curvatura geodésica de c , e infira dos itens anteriores que a curvatura (geodésica) de c , com respeito ao normal n é dada por

$$k(s) = -\frac{d\alpha}{ds} - \tanh y \sin \alpha.$$

Mostre que isto dá uma curvatura principal $k_1 = k$ da superfície de revolução gerada por c .

- (g) Mostre que a outra curvatura principal k_2 é dada por $k_2 = -\sin \alpha \coth y$.
- (h) Considere um sistema de coordenadas de B dado por x, y, θ , onde θ é o ângulo de rotação em torno do eixo x . Mostre que a métrica de B neste sistema de coordenadas se escreve como $ds^2 = \sinh^2 y d\theta + \cosh^2 y dx^2 + dy^2$. Considere $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ e $\frac{\partial}{\partial \theta}$, os campos adaptados a este referencial. Seja

$\nu := \frac{1}{\|\frac{\partial}{\partial \theta}\|} \frac{\partial}{\partial \theta}$. Mostre que

$$\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = -\left(\frac{d\alpha}{ds} + \sin \alpha \tanh y\right)n$$

$$\nabla_{\nu} \nu = -\coth y \frac{\partial}{\partial y}$$

Usando estas fórmulas re-obtenha as curvaturas principais k_1 e k_2 obtidas nos itens anteriores.

- (i) Mostre que se a curva c é o gráfico de uma função positiva $y = y(x)$, então as curvaturas principais da superfície de revolução gerada por c são dadas por:

$$k_1 = \frac{y'' \cosh y - 2 \sinh y y' - \sinh y \cosh^2 y}{(\cosh^2 y + y'^2)^{3/2}} \quad e$$

$$k_2 = -\frac{\cosh^2 y}{\sinh y (\cosh^2 y + y'^2)^{1/2}}$$

- (j) Encontre uma integral primeira da equação da curvatura média constante no espaço hiperbólico de uma curva geratriz de uma superfície de revolução, mostrando que

$$\frac{v \cosh^2 y}{\sqrt{(\cosh^2 y + y'^2)}} - 2H u = \text{const}$$

onde $v = c \sinh y$, $c =$ comprimento do círculo hiperbólico unitário e $u = \frac{c (\sinh y)^2}{2}$.

- (7) Mostre que o *toro de Clifford* do exercício 5 da Lista 3 é um *toro plano* mergulhado na esfera \mathbb{S}^3 (i. e curvatura de Gauss nula) que é uma superfície mínima.