LISTA 11 DE GEOMETRIA RIEMANNIANA 2007

RICARDO SA EARP

(1) Seja f uma função suave em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ de dimensão $n+1$ e seja M uma subvariedade de $\overline{M}$ de dimensão k. Sejam $\overline{\nabla}$ e $\overline{\triangle}$ a conexão e o Laplaciano sobre $\overline{M}$, respectivamente. Seja $\triangle$ o laplaciano sobre M. Finalmente, seja $\vec{H}$ o vetor curvatura média de M definido pela equação

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{\nabla}_{\bar{e_i}} \bar{e_i} = k\,\overrightarrow{H} + \sum_{i=1}^{k} \nabla_{e_i} e_i,$$

onde $e_1, \ldots, e_k$ é um campo de vetores ortornormais numa vizinhança de um ponto p de M e $\bar{e_1}, \ldots, \bar{e_{n+1}}$ é uma extensão ortornormal suave destes campos à uma vizinhança de p em $\overline{M}$.

(a) Mostre que $\triangle f = \sum_{i=1}^{k} (e_i\, e_i f - \nabla_{e_i} e_i f)$

(b) Mostre que $< \nabla f, \nabla_{e_i} e_i >= \nabla_{e_i} e_i f$. Interprete o termo da direita da igualdade.

(c) Mostre que $\triangle f = \overline{\triangle} f + k\vec{H} f - \sum_{j=k+1}^{n+1} (\bar{e_j}\bar{e_j} f - \overline{\nabla}_{\bar{e_j}} \bar{e_j} f)$

(d) Suponha que M é imagem inversa de um valor regular de f e que as trajetórias do gradiente que partem de $p \in M$ são geodésicas. Ou seja, f é uma função distância e $\nabla f = \frac{\partial}{\partial r}$. Interprete e expresse a fórmula do item anterior neste caso . Deduza também que $nH = -\operatorname{div}_{\overline{M}} \left(\dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \right)$, onde H é a curvatura média com respeito ao normal $N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$.

(2) Mostre que o seguinte *teorema de Hsiang*: Uma superfície completa propriamente mergulhada de $\mathbb{H}^{n+1}$ contida dentro de um cilindro de $\mathbb{H}^{n+1}$, com curvatura média constante é uma hipersuperfície de revolução. O que você pode dizer, sob as mesmas condições , se a superfície é uma superfície especial de Weingarten ?

(3) (Confira com o exercício 3 da lista 8). Seja (M, g) uma variedade Riemaniana de dimensão n e seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ um função suave. Em $M \times \mathbb{R}$ vamos definir a métrica $g_f(x_1, \ldots, x_n) := dt^2 + f^2(t)\, g(x_1, \ldots, x_n)$. Note que tal métrica não é a métrica produto (a menos que $f \equiv 1$). O espaço $M \times \mathbb{R}$ (ou $M \times_f \mathbb{R}$) é chamado de *warped product*.

Vamos considerar o tensor canônico $R_1(X,Y)Z = \langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y$. Seja $\widetilde{R}$ o tensor de curvatura de $M\times\mathbb{R}$ e R o tensor de curvatura de M. Mostre que

(a) $\widetilde{R}(\dfrac{\partial}{\partial t},\dfrac{\partial}{\partial x_i})\dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{f''}{f}\dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

(b) $\widetilde{R}(\dfrac{\partial}{\partial x_i},\dfrac{\partial}{\partial x_j})\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$.

(c) $\widetilde{R}(\dfrac{\partial}{\partial x_i},\dfrac{\partial}{\partial t})\dfrac{\partial}{\partial x_j} = \dfrac{f''}{f}g_{ij}\dfrac{\partial}{\partial t}$.

(d) $\widetilde{R}(\dfrac{\partial}{\partial x_i},\dfrac{\partial}{\partial x_j})\dfrac{\partial}{\partial x_k} = R(\dfrac{\partial}{\partial x_i},\dfrac{\partial}{\partial x_j})\dfrac{\partial}{\partial x_k} - \dfrac{f'^2}{f}R_1(\dfrac{\partial}{\partial x_i},\dfrac{\partial}{\partial x_j})\dfrac{\partial}{\partial x_k}$.

(4) Seja $p\in M$, um ponto não umbílico de uma superfície M em $\mathbb{H}^3$.

(a) Mostre que existe um referencial ortornormal $\{X_1,X_2\}$ numa vizinhança de p *principal*, i.e, $AX_i = k_i\,X_i, i=1,2$, onde A é o *operador de Weingarten* que representa a segunda forma fundamental de M.

(b) Seja ∇ a conexão de M. Mostre que as quantidades $\nabla_{X_2}X_1$, $\nabla_{X_1}X_2$, $\nabla_{X_1}X_1$, $\nabla_{X_2}X_2$ estão determinadas por funções a,b que dependem apenas de k_1,k_2 e das suas derivadas com respeito a X_1,X_2. Precisamente, mostre que numa vizinhança u de p:

$$\nabla_{X_2}X_1 = b\,X_2,\quad \nabla_{X_2}X_2 = -b\,X_1$$
$$\nabla_{X_1}X_2 = a\,X_1,\quad \nabla_{X_1}X_1 = -a\,X_2$$
$$[X_1,X_2] = a\,X_1 - b\,X_2$$

onde $a = \dfrac{X_2(k_1)}{k_2-k_1}$ e $b = -\dfrac{X_1(k_2)}{k_2-k_1}$. Além disto, mostre que a curvatura de Gauss extrínsica K_e satisfaz

$$K_e := k_1\,k_2 = \frac{(X_1^2(k_2)-X_2^2(k_1))(k_2-k_1)}{(k_2-k_1)^2} + \frac{X_1(k_2)(2X_1(k_2)-X_1(k_1))}{(k_2-k_1)^2} + \frac{X_2(k_1)(X_2(k_2)-2X_2(k_1))}{(k_2-k_1)^2} + 1$$

em U. *Sugestões*: As primeiras equações seguem da compatibilidade, da simetria e das equações de Codazzi. Enquanto que a segunda equação segue da equação de curvatura de Gauss.

(c) Mostre que existe um *sistema de coordenadas principais* numa vizinhança de p. *Sugestão*: Basta mostrar que existem campos $Y_1 = f\,X_1$ e $Y_2 = g\,X_2$; tais que $[Y_1, Y_2] = 0$.

(5) Seja $S_a^n \times S_b^m$, o espaço produto da esfera de dimensão n e curvatura sectional $a > 0$ pela esfera de dimensão m e curvatura sectional $b > 0$.

(a) Mostre que tal espaço é isométrico à $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ com a métrica $\frac{1}{a}ds_n^2 + \frac{1}{b}ds_m^2$.

(b) Mostre que todas as curvaturas seccionais ficam no intervalo $[0, \max\{a, b\}]$.

(c) Mostre que $S_a^n \times S_b^m$, tem curvatura escalar constante e que é uma variedade de Einstein, se e só se $(n-1)a = (m-1)b$, mas, nunca tem curvatura seccional constante (veja definição abaixo).

Sugestão: Escolha um referencial ortornormal (local) $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{S}^n$ com a métrica canônica ds_n^2, e um referencial ortornormal (local) $\{e_{n+1}, \ldots, e_{n+m}\}$ de $\mathbb{S}^m$ com a métrica canônica ds_m^2, trabalhando com o referencial (local) $\{\sqrt{a}\, e_1, \ldots, \sqrt{a}\, e_n, \sqrt{b}\, e_{n+1}, \ldots, \sqrt{b}\, e_{n+m}\}$, em $S_a^n \times S_b^m$. Em seguida, use a fórmula de Koszul que exprime a conexão Riemanniana em termos da métrica, levando em conta o cálculo de $\langle \nabla_{\sqrt{a}\, e_i} \sqrt{b}\, e_j, \sqrt{*}\, e_k \rangle$, considerando todos os casos para i, j, k, e chegando a uma fórmula geral. Escreva $\{F_1, \ldots, F_{n+m}\} = \{\sqrt{a}\, e_1, \ldots, \sqrt{a}\, e_n, \sqrt{b}\, e_{n+1}, \ldots, \sqrt{b}\, e_{n+m}\}$, em $S_a^n \times S_b^m$, e deduza que $R(F_i, F_j)F_k = 0$, a menos que $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$, ou $n+1 \leqslant i, j, k \leqslant n+m$. Assim conclua que $R(F_i, F_j)F_k = 0$, a menos que $i = k$ ou $j = k$. A partir disto obtenha as curvaturas seccionais, desenvolvendo *todos os detalhes*.

(6) (cf. exerc.(3) acima). Considere a variedade Riemanniana $\mathbb{S}^{n-1} \times I$, onde I é um intervalo aberto da real $\mathbb{R}$ com a métrica $dr^2 + \varphi^2(r)\, ds_{n-1}$. Note que $f(x) = f(y, r) = r$, é uma função distância. Na esfera $(\mathbb{S}^{n-1}, ds_{n-1}^2)$, escolha um referencial ortornormal $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ e um referencial ortornomal $\{F_1, \ldots, F_n\} = \{\frac{1}{\varphi}\, e_1, \ldots, \frac{1}{\varphi}\, e_{n-1}, N = \frac{\partial}{\partial r} = \nabla f\}$ de $(\mathbb{S}^{n_1} \times I, dr^2 + \varphi^2(r)\, ds_{n-1})$.

(a) Deduza que $R(F_i, F_n, F_i, F_n) = -\dfrac{\varphi''}{\varphi}$, se $i < n$, e que $R(F_i, F_j, F_i, F_j) = \dfrac{1 - \varphi'^2}{\varphi^2}$, se $i, j < n$. Conclua que as curvaturas seccionais se situam entre $-\frac{\varphi''}{\varphi}$, e $\frac{1-\varphi'^2}{\varphi^2}$.

(b) (Veja as definições de tensor de Ricci e de curvatura escalar abaixo). Deduza que

$(n-1)\,\mathrm{Ricci}(F_i) = \left((n-2)\dfrac{1-\varphi'^2}{\varphi^2} - \dfrac{\varphi''}{\varphi}\right) F_i$, se $i < n$, e que $\mathrm{Ricci}(F_n) = -\dfrac{\varphi''}{\varphi}\, F_n$.

(c) Conclua que a curvatura escalar S satisfaz
$nS = -2\dfrac{\varphi''}{\varphi} + (n-2)\dfrac{1-\varphi'^2}{\varphi^2}$.

(d) Para $n = 2$ você obtém algum resultado conhecido ?

(e) Faça $\varphi(r) = r$, $\sin r$, e $\sinh r$, e re-obtenha um resultado conhecido, explicando.

(f) Obtenha todas as métricas que são *Ricci flat*, ou seja com tensor de Ricci nulo, separando os casos $n = 2$ e $n > 2$.

(g) Faça uma mudança de variáveis $\varphi' = G(\varphi)$, (reduzindo a ordem da equação), e usando separação de variáveis mostre que a equação da curvatura escalar *flat* ($S = 0$) fica
$\varphi'^2 = 1 + C\varphi^{2-n}$, onde C é uma constante.

(7) Seja $M = \mathrm{Nil}_3$ o espaço de Heisenberg.

(a) Mostre que o tensor de Ricci (veja definição abaixo) tem tanto auto-valores positivos como negativos.

(b) Mostre que a curvatura escalar é constante.

(8) Considere o grupo de Lie

$$\begin{aligned} SU(2,\mathbb{C}) &= \{A \in M(2,\mathbb{C});\ \det A = 1, \overline{A}^t = A^{-1}\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} z & -w \\ \{\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix},\ |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\} \equiv \mathbb{S}^3 \end{aligned}$$

Lembre que a álgebra de Lie $su(2)$ de $SU(2,\mathbb{C})$ é

$$\left\{ \begin{bmatrix} i\alpha & \beta + i\gamma \\ -\beta + i\gamma & -i\alpha \end{bmatrix},\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

gerada pelos campos invariantes à esquerda $X_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $X_3 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$.

Dado $\varepsilon > 0$, vamos definir uma família de métricas em $SU(2,\mathbb{C})$, impondo que o referencial $\{\dfrac{X_1}{\varepsilon}, X_2, X_3\}$ seja ortornormal. Note que a multiplicação por escalar em $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$ corresponde à multiplicação à esquerda, pelas matrizes $\begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}$. Assim, note que X_1 é tangente às fibras da *fibração de Hopf*. Tais variedades Riemannianas tridimensionais são chamadas de *esferas de Berger*.

(a) Mostre os cálculos dos colchetes: $[X_1, X_2] = 2X_3, [X_2, X_3] = 2X_1, [X_3, X_1] = 2X_2$.

(b) Use a fórmula de Koszul que exprime a conexão Riemanniana em termos da métrica, para mostrar que $\nabla_{X_1} X_2 = (2 - \varepsilon^2) X_3$, $\nabla_{X_2} X_3 = X_1$, $\nabla_{X_3} X_1 = \varepsilon^2 X_2$, $\nabla_{X_j} X_j = 0$.

(c) Mostre que $R(X_1, X_2)X_3 = 0$.

(d) Mostre que $R(X_2, X_3, X_2, X_3) = (4 - 3\,\varepsilon^2)$, e $R(X_3, \dfrac{X_1}{\varepsilon}, X_3, \dfrac{X_1}{\varepsilon}) = \varepsilon^2$.

(e) Deduza que as curvaturas sectionais estão no intervalo $[\varepsilon^2, 4 - 3\,\varepsilon^2]$.

(9) Primeiramente, vamos recordar algumas noções geométricas, por exemplo, vamos estabelecer as definições de *tensor de Ricci* e de curvatura escalar S : Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n, ∇ a conexão Riemannaiana de M e R o tensor de curvatura de M. O tensor de Ricci está definido da seguinte maneira:
$(n-1)\,\mathrm{Ricci}(X, Y) = \text{traço } Z \mapsto R(X, Z)Y, \text{ e } \mathrm{Ricci}(X) = \mathrm{Ricci}(X, X)$.
Note que o tensor de Ricci é uma média de outras curvaturas e que para X campo unitário, $\mathrm{Ricci}(X)$ é a média de $n-1$ curvaturas sectionais em planos que contém X, e que são ortogonais um aos outros. O traço normalizado do tensor de Ricci (traço da aplicação auto-adjunta que o representa) é chamado de curvatura escalar S.

Dizemos que a variedade Riemanniana (M, g) é um *espaço de Einstein*, se o tensor de Ricci é um múltiplo do tensor métrico g.

Note que quando M é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$ existe a noção de *aplicação normal de Gauss*, análoga a da conhecida para $n = 2$. Lembre que a derivada desta aplicação é o *shape operator*, ou o operador de Weingarten A, os auto valores são as curvaturas principais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e os invariantes são as r-ésimas funções simétricas de curvatura S_r, dados por:

$$\det(tI - A) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r S_r t^{n-r}.$$

Por exemplo, o traço $\lambda_1 + \cdots \lambda_n$ é n vezes a curvatura média e o produto $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ (determinante) das curvaturas principais é chamado de *curvatura de Gauss -Kronecker*. A soma $\sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j$

é S_2 a segunda função simétrica de curvatura, etc. Quando normalizamos estas funções simétricas obtemos H_r, as r-ésimas curvaturas médias.

Responda verdadeiro ou falso. Caso verdadeiro, esboce uma dedução rigorosa. Caso falso, exiba um contra-exemplo.

(a) Numa variedade Riemanniana de dimensão 3, o tensor de Ricci determina as curvaturas seccionais. Quando M é Einstein então M tem curvatura sectional constante.
(b) Para $n \geqslant 3$ não existe uma métrica g com curvatura sectional estritamente negativa numa uma variedade Riemanniana $(M.g)$ de dimensão n, que pode ser realizada localmente como uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$.
(c) A afirmação anterior continua verdadeira para $n = 2$.
(d) As variedades produto (com as métricas canônicas em cada fator e a métrica produto da variedade produto) $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$, admitem métricas com curvatura sectional constante.
(e) A variedade produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, não admite um toro plano (*flat*) totalmente geodésico mergulhado nesta.
(f) Os espaço produto de esferas $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ e o espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$ admitem métricas com curvatura seccional constante.
(g) A variedade produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ é uma variedade de Einstein.
(h) Uma superfície compacta, fechada ,de gênero $g > 1$ admite uma métrica de curvatura sectional constante igual a -1.
(i) Se M^n é uma hipersuperfície fechada de $\mathbb{R}^{n+1}$, com curvatura de Gauss-Kronecker estritamente positiva em todos os pontos, então M é difeomorfa à esfera $\mathbb{S}^n$.
(j) Se M^n é uma hipersuperfície fechada de $\mathbb{R}^{n+1}$, e se o operador de Weingarten é sempre estritamente positivo, então M é difeomorfa à esfera $\mathbb{S}^n$.
(k) Uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura sectional limitada inferiormente por uma constante positiva, i.e $\geqslant \varepsilon$, então também tem a segunda curvatura média H_2 estritamente positiva.
(l) Existe uma superfície propriamente mergulhada em $\mathbb{H}^3$ de curvatura média constante igual a 1 cujo bordo assimptótico é um ponto e não é uma horosfera.
(m) Existe um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ que contém discos de raios arbitrariamente grandes e existe existe uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$, tal que a curvatura média H do gráfico de f satisfaz $H \geqslant c > 0$, sendo c uma constante positiva.

(n) Existe um gráfico vertical mínimo em $\mathbb{H}^{n+1}$ sobre um semi-espaço fechado do bordo assimptótico $\partial_\infty \mathbb{H}^{n+1}$.

(o) Um superfície com curvatura de Gauss extrínseca constante igual a 1 imersa em $\mathbb{H}^3$ é *flat* (plana).

(p) As curvaturas seccionais de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ variam entre -1 e 0.

(q) Não existem planos (superfícies) totalmente geodésicas de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, fora dos *slices* $\mathbb{H}^2 \times \{t\}$.

(r) Um superfície mínima completa de $\mathbb{H}^3$ é não compacta.

(s) Uma superfície completa com curvatura de Gauss estritamente positiva de uma variedade Riemanniana de curvatura sectional não positiva tem área finita.

(t) Uma superfície completa sempre tem área infinita.

(u) Assuma que $g = dr^2 + f^2(r)\, d\theta$ seja uma métrica suave em todo o plano bidimensional $\mathbb{R}^2$, usando coordenadas polares. Ou seja, $(\mathbb{R}^2, g)$ é uma superfície Riemanniana. Segue então que tal métrica é completa e que a área total é dada por $2\pi \int\limits_0^\infty f(r)\, dr$, podendo ser infinita ou não, Tal métrica pode ser realizada como uma superfície de revolução de $\mathbb{R}^3$.

(v) A curvatura de Gauss de uma superfície Riemanniana com métrica $g = ds^2 + U^2(s)\, dt, U(s) > 0$ não depende de t; além disso, a métrica hiperbólica pode ser expressa desta forma para uma escolha de $U(s)$.

(w) A curvatura total $C(M) := \int\limits_M |K|\, dA$ (K é a curvatura total de M) de uma superfície mínima completa M de $\mathbb{R}^3$ é sempre infinita.

(x) A curvatura total $C(M) := \int\limits_M |K|\, dA$ (K é a curvatura total de M) de uma superfície totalmente geodésica completa M de $\mathbb{H}^3$ é sempre infinita.

(y) Uma superfície Riemanniana é sempre localmente conformemente *flat* (plana).

(z) Uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante é localmente conformemente *flat* (plana).

(10) Seja M uma variedade Riemanniana completa. Seja $N \subset M$ uma subvariedade fechada. Seja $p \in M - N$. Mostre que existe uma geodésica minimizante $\gamma, \gamma(0) = p, \gamma(l) \in N$, de modo que $\mathrm{dist}(p, N) = \mathrm{compr}(\gamma) = l$. Além disto,$\gamma'(l) \perp N$. *Sugestões*

(complete *todos* os detalhes): Seja $l = \operatorname{dist}(p, N)$. Note que o disco geodésico $\overline{B}_{l+1}(p)$, de centro P e raio $l+1$ é compacto e que $K := \overline{B}_{l+1}(p) \cap N \neq \emptyset$. Mostre que $x \mapsto \operatorname{dist}(p,x)$ atinge um mínimo sobre K. $\Longrightarrow \exists q \in N; \operatorname{dist}(p,q) = l$. Seja γ uma geodésica minimizante ligando p a q (por que existe?). Seja $\beta(s)$ uma curva em N; $\beta(0) = q$. Seja $p_1 \in U \cap \gamma([0,l])$, onde U é uma vizinhança normal de q. Seja $\tilde{\beta} \subset T_{p_1}M$ definida por $\tilde{\beta}(s) = \exp_{p_1}^{-1}\big(\beta(s)\big)$. Claro que $\tilde{\beta}(s)$ está apenas definida para s suficientemente pequeno (por quê ?). Faça um desenho!!. Defina $f(s,t) = \exp_{p_1}\big(t \cdot \tilde{\beta}(s)\big), f(s,0) = p_1, f(s,1) = \beta(s)$. Sendo a geodésica γ_1, definida como sendo a restrição de γ ao arco entre p_1 e q, minimizante $\Longrightarrow \operatorname{compr}\big(f(s_0,t)\big) \geqslant \operatorname{compr}\big(f(0,t)\big) \forall s_0$, fazendo variar t de 0 a 1 (Por quê ?). Aplique a fórmula da primeira variação da energia para concluir o resultado (faça um desenho!!).

(11) Seja M uma superfície completa de curvatura de Gauss estritamente positiva. Sejam γ_1, γ_2 duas geodédicas simples e fechadas de M. Mostre que $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$. *Sugestões* (complete *todos* os detalhes !!) : Caso contrário, $\exists$ geodésica γ; $\operatorname{dist}(\gamma_1, \gamma_2) = \operatorname{compr}(\gamma) = l$. Pelo resultado anterior $\gamma_1, \gamma_2 \perp \gamma$. Seja $V(0) = \gamma_1'(\gamma(0))$ e $V(t)$ o transporte paralelo de $V(0)$ ao longo de γ à $V(l) = \gamma(l) = q$. Considere $f(s,t) = \exp_{\gamma(t)}\big(s \cdot V(t)\big)$, $\quad -\varepsilon < s < \varepsilon$. Note que $f(s,0) = \gamma_1(s), f(s,l) = \gamma_2(s)$. Mostre que a fórmula da segunda variação, após algumas considerações e cálculos fica:
$$\frac{1}{2}\ddot{E}(0) = -\int_0^1 K \cdot l^2.$$
Conclua daí o resultado desejado.

(12) Seja K uma hipersuperfície mergulhada em uma variedade Riemanniana completa M, com conexão ∇. Seja $\gamma(t)$ uma geodésica de M parametrizada pelo comprimento de arco t, tal que $\gamma(0) \in K$ e $\gamma'(0) \in T^{\perp}_{\gamma(0)}K$. Assuma que existe um campo de vetores unitário normal N; tal que $N(\gamma(0)) = \gamma'(0)$.
   (a) Considere $\alpha(s)$ uma curva suave, contida em K tal que $\alpha(0) = \gamma(0)$ e
   $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,r] \to M$, uma variação de $\gamma(t)$, definida como
   $f(s,t) = \exp_{\alpha(s)}(tN(\alpha(s)))$. Mostre que
$$< \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} >_{f(s,t)} = 0$$

Sugestão : Use a simetria da conexão e o fato que as curvas $s = $ const são geodésicas.

(b) Diz-se que um campo de Jacobi $J(t)$, definido ao longo da geodésica $\gamma(t)$ é um K-campo de Jacobi, sse satisfaz às seguintes condições :
- $< J(t), \gamma'(t) >= 0$.
- $J'(0) + A(\gamma'(0))J(0) = 0$, onde A denota a aplicação de Weingarten.
- Sejam $\alpha(s)$ uma curva em K com $\alpha(0) = \gamma(0)$, $f(s,t) = \exp_{\alpha(s)}(tN(\alpha(s)))$ e $J(t) = \dfrac{\partial f(0,t)}{\partial s}$. Mostre que $J(t)$ é um K-campo de Jacobi ao longo de $\gamma(t)$. *Sugestão* : Note que como $f(s,t)$ é uma variação por geodésicas então $J(t)$ é um campo de Jacobi. Note que a condição anterior garante o item a) da definição de K-campo de Jacobi. Finalmente note que

$$\begin{aligned} J'(0) &= \frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f(0,0)}{\partial s} \\ &= \frac{D}{\mathrm{d}s}\frac{\partial f(0,0)}{\partial t} \\ &= \nabla_{J(0)}\frac{\partial f(s,0)}{\partial t} \\ &= -A(\gamma'(0))J(0) \end{aligned}$$

- Mostre que se $J(t)$ é um K-campo de Jacobi ao longo de $\gamma(t)$, então existe uma curva $\alpha(s)$ em K tal que fazendo $f(s,t) = \exp_{\alpha(s)}(tN(\alpha(s)))$, $J(t) = \dfrac{\partial f(0,t)}{\partial s}$.*Sugestão* : Considere $\alpha(s)$ uma curva em K tal que $\alpha'(0) = J(0)$ e considere $\widetilde{J}(t) = \dfrac{\partial f(0,t)}{\partial s}$. Mostre que $\widetilde{J}(t)$ é um K-campo de Jacobi e note que $\widetilde{J}(0) = J(0)$. Use o item da definição de K-campo de Jacobi.

(c) Considere agora duas hipersuperfícies K e G mergulhadas em uma variedade Riemanniana M de dimensão $n+1$. Assuma que exista um campo unitário N de vetores normais à K. Diz-se que K e G são *paralelas* se existe s tal que a aplicação $\phi_s(x) := \exp_x(sN(x))$ definida em K seja um difeomorfismo entre K e G. Mostre que se $p \in K, \gamma(t) = \exp_p(tN(p))$ e $J(t)$ é um K-campo de Jacobi ao longo de

$\gamma(t)$, então $J(t+s)$ é um G-campo de Jacobi. Assuma que $K_t := \phi_t(K)$ são hipersuperfícies. Dado um ponto $y = \phi_{t_0}(x)$ de K_{t_0} define-se $N(y) := \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t(x) \Big|_{t=t_0}$. Cada K_t admite uma orientação natural determinada por N. Assuma a existência de uma função suave $f : M \to \mathbb{R}$ tal que f restrita à cada K_t seja constante. Seja $\widetilde{f}(t) := f(K_t)$. Mostre que

$$\triangle f(p) = \widetilde{f}''(t_0) - n\widetilde{f}'(t_0)H(p) \qquad p \in K_{t_0}$$

Sugestão : Observe que $\nabla f(y) = \widetilde{f}'(t)N$, e que $\nabla_N N(y) = 0$, $y \in K_t$. Considere $\{e_1, \ldots, e_n\}$ referencial local ortornormal em uma vizinhança de p em M tal que em p $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é tangente às direções principais.
Conclua Sejam K_t e f definidos acima. Mostre que se $\triangle f$ é constante em cada K_t então K_t é uma hipersuperfície de curvatura média constante.

(d) Suponha que $M = \mathbb{M}^{n+1}(c)$ uma variedade de curvatura seccional constante c . Assuma que $K_t = \phi_t(K)$, sejam hipersuperfícies mergulhadas, e portanto paralelas à K. Seja $p \in K, \gamma(t) = \phi_t(p)$ e seja $\{e_i\}$ uma base ortornormal de direções principais de p associadas às curvaturas principais k_i. A finalidade da presente discussão é determinar as curvaturas principais e as direções principais de K_t em $\gamma(t)$: Tome $\{J_i(t)\}$, n K-campos de Jacobi ao longo de $\gamma(t)$ com $J_i(0) = e_i$. (Veja acima). O fato de que $J_i''(t) + cJ_i(t) = 0$ (Por quê ?), a definição de um K-campo de Jacobi e a unicidade de campos de Jacobi garantem que :

$$J_i(t) = g_i(t)e_i(t)$$

(e) onde $e_i(t)$ é o transporte paralelo de e_i ao longo de $\gamma(t)$ e $g_i(t)$ é uma função suave que satisfaz às seguintes equações

$$g_i''(t) + cg_i(t) = 0$$
$$g_i'(0) + k_i g_i(0) = 0$$

(f) Logo, se $c = 0, g_i(t) = -k_i t + 1$, se $c = -1, g_i(t) = -k_i \sinh t + \cosh t$, se $c = 1, g_i(t) = -k_i \sin t + \cos t$. Mostre que, nas condições acima, $\{e_i(t)\}$ é uma base ortornormal de direções principais de K_t em $\gamma(t)$ associadas às curvaturas principais $-\dfrac{g_i'(t)}{g_i}$. Calcule as curvaturas principais em cada caso $c = 0, 1, -1$.