

LISTA 2 DE GEOMETRIA RIEMANNIANA 2007

RICARDO SA EARP

Considere $\mathbb{H} := \{t + xi + yj + zk; t, x, y, z \in \mathbb{R}\}$ o conjunto dos quatérnios que é o espaço \mathbb{R}^4 dotado de uma multiplicação \cdot definida, por bilinearidade, de acordo com o produto dos elementos básicos, i.e $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$, etc... Define-se o conjugado \bar{w} de $w = t + xi + yj + zk$, por $\bar{w} = t - xi - yj - zk$, e assim $w \cdot \bar{w} = |w|^2$. Além disso, o módulo de um quatérnio respeita a multiplicação, ou seja $|w \cdot v| = |w||v|$.

- (1) Mostre que $\mathbb{S}^3 = \{w \in \mathbb{H}; w \cdot \bar{w} = 1\} \subset \mathbb{R}^4$ é um grupo de Lie com respeito a multiplicação dos quatérnios.
- (2) Seja $q \in \mathbb{S}^3$. Seja $SO(3)$ o grupo de rotações de \mathbb{R}^3 , identificado com o conjunto E^3 dos imaginários puros, i.e $E^3 = \{xi + yj + zk; x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
 - (a) Mostre, *escrevendo todos os detalhes*, que a aplicação $q \mapsto \varphi_q; \varphi_q(w) = q \cdot w \cdot q^{-1}, w \in E^3$, é um homomorfismo sobrejetor de \mathbb{S}^3 em $SO(3)$, que é uma aplicação de recobrimento suave de \mathbb{S}^3 em $SO(3)$, cujo núcleo (ou “fibra”) é $\{-1, 1\}$. Conclua que o grupo $SO(3)$, das rotações Euclidianas de \mathbb{R}^3 , é difeomorfo ao espaço projetivo real $\mathbb{R}P^3$. Você saberia dizer algo sobre $\pi_1(SO(3))$? (investigue isto).
- (3) Dê exemplos de grupos de Lie compactos que é base de uma fibração cuja fibra é $\mathbb{Z}^n := \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ (produto n vezes, \mathbb{Z} é o conjunto dos inteiros).
- (4) Realize o grupo finito \mathbb{Z}_n (inteiros módulo n) como um grupo propriamente descontínuo de difeomorfismos agindo sobre um grupo de Lie compacto G , e discuta o quociente G/\mathbb{Z}_n e a aplicação $G \rightarrow G/\mathbb{Z}_n$.
- (5) Considere a aplicação $\pi : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \rightarrow SO(4)$, definida por $(x, y) \mapsto \pi_{x,y} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \pi_{x,y}(w) = x^{-1} \cdot w \cdot y$. Mostre que de fato π está bem definida e que é um homomorfismo sobrejetivo suave de grupos de Lie. Mostre que π é um recobrimento cuja fibra é \mathbb{Z}_2 .
- (6) Considere Nil_3 o grupo de Heisenberg de dimensão 3 representado no grupo de matrizes inversíveis $Gl(3, n)$ pelo conjunto das matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para a, b, c reais.

- (a) Mostre que a álgebra de Lie de Nil_3 , denotada de \mathfrak{h}_3 é constituída de matrizes da forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

observando e mostrando que a exponencial de matrizes $\exp : \mathfrak{h}_3 \longrightarrow \text{Nil}_3$ é dada por

$$\exp(A) = I + A + A^2/2 = \begin{bmatrix} 1 & x & z + xy/2 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e que dá uma parametrização global do espaço de Heisenberg, identificando a álgebra de Lie \mathfrak{h}_3 com o espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 , da seguinte maneira:

$$(x, y, z) \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- (b) Mostre que, com a identificação acima de Heisenberg com o espaço Euclidiano dada pela parametrização global, o produto de $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $X_2 = (x_2, y_2, z_2)$ no espaço de Heisenberg está dado por

$$(x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2) = X_1 + X_2 + B(X_1) \cdot X_2$$

onde

$$B(X_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -y_1/2 & x_1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

- (c) Mostre que a álgebra de Lie, em termos da base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^3 está dada por $[e_1, e_2] = e_3$, e $[e_i, e_3] = 0, i = 1, 2$. Mostre ainda que uma base dos campos de vetores invariantes à esquerda está dada por $E_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}$, $E_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}$ e $E_3 = \frac{\partial}{\partial z}$.