

LISTA 3 DE GEOMETRIA RIEMANNIANA 2007

RICARDO SA EARP

- (1) Seja M o toro de revolução mergulhado em \mathbb{R}^3 que é a imagem da aplicação $f(\theta, \varphi) = ((2 + \cos \theta) \cos \varphi, (2 + \cos \theta) \sin \varphi, \sin \theta)$, $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$.
 - (a) Escrever em coordenadas locais θ, φ a métrica induzida sobre M proveniente da métrica canônica de \mathbb{R}^3 . Explicar, justificando corretamente, se o difeomorfismo canônico do toro plano \mathbb{T}^2 sobre M é uma isometria ou não.
 - (b) Explicar, justificando corretamente, se o toro plano \mathbb{T}^2 é localmente isométrico ao plano ou não. Dê exemplo de dois toros planos que não são isométricos.
- (2) Deduzir que o cone em \mathbb{R}^3 é localmente isométrico ao plano.
- (3) Considere a métrica g induzida em \mathbb{C} oriunda de \mathbb{S}^2 pela parametrização (conforme) que é a inversa da projeção estereográfica do pólo norte $\Pi_N^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, z \mapsto \left(\frac{2z}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$, tomando em \mathbb{S}^2 a métrica usual. Deduza que g é conforme à métrica plana usual de \mathbb{C} , e encontre uma expressão desta métrica em termos de z . Será que esta fórmula muda quando tomamos outra parametrização (conforme) que é a composta da reflexão no eixo x com a inversa da projeção estereográfica do pólo sul? Por quê? *Sugestão:* Considere a métrica canônica de \mathbb{R}^3 , $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$, e calcule as 1-formas dx_1, dx_2, dx_3 , em termo de u, v , onde $z := u + iv$.
- (4) Considere a superfície de revolução da *catenária*, chamada de *catenóide* dada por $x = a \cosh v \cos u, y = a \cosh v \sin u, z = av; 0 < u < 2\pi, v \in \mathbb{R}$ (“catenóide menos um meridiano”). O catenóide é a única *superfície mínima de revolução* de \mathbb{R}^3 . Considere o *helicóide* de \mathbb{R}^3 parametrizado por $x = a \sinh v \cos u, y = a \sinh v \sin u, z = av; 0 < u < 2\pi, v \in \mathbb{R}$ (“pedaço do helicóide entre as alturas $z = 0$, e $z = 2\pi a$ ”). O helicóide é a única *superfície mínima regrada* de \mathbb{R}^3 . Encontre uma definição geométrica do helicóide e mostre que o catenóide e o helicóide são localmente isométricos. Encontre uma família

a 1-parâmetro de superfícies mínimas ligando o catenóide ao helicóide.

- (5) Mostre que $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $(\theta, \varphi) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \theta, \sin \theta, \cos \varphi, \sin \varphi)$, é uma imersão de \mathbb{R}^2 na esfera unitária \mathbb{S}^3 . A imagem $X(\mathbb{R}^2)$ é uma *superfície mínima* de \mathbb{S}^3 , chamada de *toro de Clifford*. Mostre que $\{(-\sin \theta, \cos \theta, 0, 0), (0, 0, -\sin \varphi, \cos \varphi)\}$ é um referencial ortornormal do espaço tangente e que $\{\frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \theta, \sin \theta, \cos \varphi, \sin \varphi), \frac{1}{\sqrt{2}} (-\cos \theta, -\sin \theta, \cos \varphi, \sin \varphi)\}$, é uma base ortornormal do espaço normal ao toro de Clifford (em \mathbb{R}^4).
- (6) Seja g_1 a métrica de \mathbb{S}^{n-1} . Seja $(dr)^2$ a métrica canônica de $I = (0, \infty)$. Defina-se a métrica g em $\mathbb{S}^{n-1} \times I$, por $g_{m,r} = r^2 \cdot g_1 + (dr)^2$, $m \in \mathbb{S}^{n-1}$, $r \in I$
- Será que g é a métrica produto ?
 - Deduzir que $(\mathbb{S}^{n-1} \times I, g)$ é isométrica à métrica de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ munida da métrica Euclideana.
 - Mostrar que $(\mathbb{S}^{n-1} \times I, g_1 \times (dr)^2)$ é isométrica ao cilindro $\mathcal{C} = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1; x_0 > 0\}$ munido da métrica induzida de \mathbb{R}^{n+1} .
- (7) Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^n \times (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, por $f(z, r) := (x, t) = (\sin r \cdot z, \cos r)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, $r \in (0, \pi)$.
- Deduzir que f determina um difeomorfismo $g : \mathbb{S}^{n-1} \times (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ por $g(z, r) = (\sin r \cdot z, \cos r)$.
 - Deduzir que a métrica induzida em $\mathbb{S}^{n-1} \times (0, \pi)$, pela métrica canônica de \mathbb{S}^n , dada pela restrição da métrica canônica de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $dt^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2$ à \mathbb{S}^n , é dada por $dr^2 + \sin^2 r ds_{n-1}^2$, onde ds_{n-1}^2 é a métrica canônica de \mathbb{S}^{n-1} , que é a restrição da métrica Euclideana $dz_1^2 + \dots + dz_n^2$ à \mathbb{S}^{n-1} .
 - Uma consideração análoga pode-se fazer para as métricas $dt^2 + \sin^2 t ds_p^2 + \cos^2 t ds_q^2$ em $\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q \times (0, \pi/2)$, considerando a aplicação $\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q \times (0, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{q+1}$, $(x, y, t) \mapsto (x \cdot \sin t, y \cdot \cos t)$. Tais métricas são chamadas de “warped products” (logo, a métrica canônica da esfera pode ser vista assim). Aqui ds_p^2 , denota a métrica canônica da esfera \mathbb{S}^p .