

LISTA 4 DE GEOMETRIA RIEMANNIANA 2007

RICARDO SA EARP

- (1) Seja \mathbb{M} uma variedade Riemanniana de dimensão 2 (superfície Riemanniana). Seja $z = x + iy, z \in U, U$ aberto, coordenada conforme em \mathbb{M} , i.e $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{M}, z \mapsto f(z) \in \mathbb{M}$, é uma parametrização conforme, em que a métrica induzida ds^2 em U oriunda da métrica de \mathbb{M} está dada por $ds^2 = \sigma^2 |dz|^2$. Diz-se informalmente que ds^2 é uma métrica conforme em \mathbb{M} (identificando U com sua imagem em $V := f(U) \subset \mathbb{M}$).

Agora, considere o espaço produto $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$ munido da métrica produto. Assim (x, y, t) são coordenadas locais em $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$ ($z = x + iy$ são coordenadas conformes (ou isotérmicas) em \mathbb{M} e t é a coordenada usual de \mathbb{R}). Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio e seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{M} \times \mathbb{R}, w \mapsto (h(w), f(w))$, $w = u + iv, u, v \in \mathbb{R}$ uma imersão de Ω em $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$ (imagina $h(\Omega) \subset V$). Diz-se que $h(w)$ é a componente horizontal e que $f(w)$ é a componente vertical. Seja $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}, \partial_y := \frac{\partial}{\partial y}, \partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$, o referencial local do espaço tangente, onde ∂_x, ∂_y é um referencial do plano tangente à \mathbb{M} adaptado à f e ∂_t é o campo vertical canônico tangente à “reta” $t \mapsto (*, t), * \in \mathbb{M}$.

Relembre a notação complexa: Se g é uma função suave diferenciável (complexa) em Ω então, define-se os operadores (complexos) $g_w := \frac{1}{2}(g_u - ig_v)$, e $g_{\bar{w}} := \frac{1}{2}(g_u + ig_v)$.

- (a) Mostre que $X : \Omega \rightarrow \mathbb{M} \times \mathbb{R}, w = u + iv \mapsto (h(w), f(w))$, é uma imersão conforme, se e só se $(f_w)^2 = -(\sigma \circ h)^2 h_w \bar{h}_w$.
- (b) Conclua que a métrica induzida por X , escrita da forma $\mu^2 |dw|^2$, está dada por (usando a linguagem complexa) $\mu^2 = (\sigma \circ h)^2 (|h_w| + |h_{\bar{w}}|)^2$.
- (c) Seja N a aplicação de Gauss map (normal unitário) em $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$. Coloque $N = N_1 \frac{\partial}{\partial x} + N_2 \frac{\partial}{\partial y} + N_3 \frac{\partial}{\partial t}$. Verifique que

$$N := (N_1, N_2, N_3) = \frac{(\frac{2}{\sigma} \text{Reg}, \frac{2}{\sigma} \text{Img}, |g|^2 - 1)}{|g|^2 + 1}, \text{ onde}$$

$$g := \frac{f_w h_{\bar{w}} - f_{\bar{w}} h_w}{\sigma |h_{\bar{w}}| (|h_w| + |h_{\bar{w}}|)}. \text{ Sugestão: Calcule } \langle X_u, N \rangle, \langle X_v, N \rangle, \langle N, N \rangle.$$

- (2) Considere o disco de Poincaré \mathbb{H}^2 , i.e o disco aberto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$, munido da métrica hiperbólica $\frac{4}{(1-|z|^2)^2} |dz|^2$. Seja ρ a *distância hiperbólica* de um ponto (x, y) à origem (raio hiperbólico).

- (a) Mostre que $R = \sqrt{x^2 + y^2} = \tanh \rho/2$.
- (b) Mostre que a métrica ds^2 no produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, t) , é dada por $ds^2 = d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\theta + dt^2$.
- (c) Seja $\ell \in \mathbb{R}$. Seja S uma superfície imersa em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ dada por

$$X(\rho(s), \varphi(s, \tau)) = (\tanh \rho/2 \cos \varphi, \tanh \rho/2 \sin \varphi, \lambda(\rho) + \ell \varphi), \quad s, \tau \in \mathbb{R}$$

Mostre que a métrica induzida em S , tomando coordenadas cilíndricas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, está dada por

$$d\mu^2 = (1 + \lambda'^2) d\rho^2 + 2\ell\lambda' d\rho d\varphi + (\ell^2 + \sinh^2 \rho) d\varphi^2$$

- (3) Considerando $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, com a métrica esférica $\frac{4}{(1+|z|^2)^2} |dz|^2$, faça uma análise parecida com a que foi feita acima no item (2) considerando coordenadas cilíndricas (ρ, θ, t) em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, trocando $\sinh \rho \rightarrow \sin \rho$.
- (4) Escreva a métrica produto em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, tomando coordenadas esféricas (θ, φ) de \mathbb{S}^2 .
- (5) Considere $\mathbb{R}^{1,n+1} := \mathbb{R}^{n+2}$ munido com a *métrica de Lorentz* $Q = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_{n+1}^2$. A seguinte superfície “space-like” $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{1,n+1}$ com a *métrica Riemanniana induzida* dá origem ao *modelo de Minkowski* do espaço hiperbólico \mathbb{H}^{n+1} :
 $S := \{x = (x_0, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n+2}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}, x_0 > 0, Q(x) = |\mathbf{x}|^2 - x_0^2 = -1\}$.
 Por definição o grupo de isometrias de \mathcal{S} , denotado por $O^+(1, n+1)$ preserva esta métrica.

- (a) Considere as matrizes

$$\begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 & \dots & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Mostre que o conjunto de tais matrizes constitui um subgrupo $\Gamma \subset O^+(1, n+1)$ a 1-parâmetro de isometrias de \mathcal{S}

- (b) Mostre que com a ajuda de uma “rotação horizontal”, que é uma isometria de \mathcal{S} , pode-se levar qualquer ponto $(x_0, \mathbf{x}) \in \mathcal{S}$ num ponto da forma $v = (x_0, |\mathbf{x}|\mathbf{e}_1) \in \mathcal{S}$, onde $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$. Logo como $v \in \mathcal{S}$, pode-se escrever v da forma $v = (\cosh s, \sinh s \mathbf{e}_1)$, para algum $s \in \mathbb{R}$.
- (c) Mostre que com a ajuda do subgrupo Γ acima pode-se enviar v ao ponto $(1, 0)$, tomando $t = -s$.
- (d) Conclua que o grupo de isometrias de \mathcal{S} age transitivamente em \mathcal{S} .