LISTA 4 DE GEOMETRIA RIEMANNIANA 2007

RICARDO SA EARP

(1) Seja $\mathbb{M}$ uma variedade Riemanniana de dimensão 2 (superfície Riemanniana). Seja $z = x + iy, z \in U$, U aberto, coordenada conforme em $\mathbb{M}$, i.e $f : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{M}$, $z \mapsto f(z) \in \mathbb{M}$, é uma parametrização conforme, em que a métrica induzida ds^2 em U oriunda da métrica de $\mathbb{M}$ está dada por $ds^2 = \sigma^2|dz|^2$. Diz-se informalmente que ds^2 é uma métrica conforme em $\mathbb{M}$ (identificando U com sua imagem em $V := f(U) \subset \mathbb{M}$).

Agora, considere o espaço produto $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$ munido da métrica produto. Assim (x, y, t) são coordenadas locais em $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$ ($z = x + iy$ são cordenadas conformes (ou isotérmicas) em $\mathbb{M}$ e t é a coordenada usual de $\mathbb{R}$). Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio e seja $X : \Omega \looparrowright \mathbb{M} \times \mathbb{R}$, $w \mapsto (h(w), f(w))$,
$w = u + iv, u, v \in \mathbb{R}$ uma imersão de Ω em $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$ (imagina $h(\Omega) \subset V$). Diz-se que $h(w)$ é a componente horizontal e que $f(w)$ é a componente vertical. Seja $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}, \partial_y := \frac{\partial}{\partial y}, \partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$, o referencial local do espaço tangente, onde ∂_x, ∂_y é um referencial do plano tangente à $\mathbb{M}$ adaptado à f e ∂_t é o campo vertical canônico tangente à "reta" $t \mapsto (*, t), * \in \mathbb{M}$.

Relembre a notação complexa: Se g é uma função suave diferenciável (complexa) em Ω então, define-se os operadores (complexos) $g_w := \frac{1}{2}(g_u - ig_v)$, e $g_{\overline{w}} := \frac{1}{2}(g_u + ig_v)$.

(a) Mostre que $X : \Omega \looparrowright \mathbb{M} \times \mathbb{R}$, $w = u + iv \mapsto (h(w), f(w))$, é uma imersão conforme, se e só se $(f_w)^2 = -(\sigma \circ h)^2 h_w \overline{h}_w$.

(b) Conclua que a métrica induzida por X, escrita da forma $\mu^2|dw|^2$, está dada por (usando a linguagem complexa) $\mu^2 = (\sigma \circ h)^2 (|h_w| + |h_{\overline{w}}|)^2$.

(c) Seja N a aplicação de Gauss map (normal unitário) em $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$. Coloque $N = N_1 \frac{\partial}{\partial x} + N_2 \frac{\partial}{\partial y} + N_3 \frac{\partial}{\partial t}$. Verifique que $N := (N_1, N_2, N_3) = \dfrac{(\frac{2}{\sigma}\mathrm{Re}g, \frac{2}{\sigma}\mathrm{Im}g, |g|^2 - 1)}{|g|^2 + 1}$, onde $g := \dfrac{f_w h_{\overline{w}} - f_{\overline{w}} h_w}{\sigma |h_{\overline{w}}|(|h_w| + |h_{\overline{w}}|)}$. *Sugestão*: Calcule $< X_u, N >$, $< X_v, N >, < N, N >$.

(2) Considere o disco de Poincaré $\mathbb{H}^2$, i.e o disco aberto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$, munido da métrica hiperbólica $\frac{4}{(1-|z|^2)^2}|dz|^2$. Seja ρ a *distância hiperbólica* de um ponto (x, y) à origem (raio hiperbólico).

(a) Mostre que $R = \sqrt{x^2 + y^2} = \tanh \rho/2$.

(b) Mostre que a métrica ds^2 no produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, t), é dada por
$ds^2 = d\rho^2 + \sinh^2 \rho \, d\theta + dt^2$.

(c) Seja $\ell \in \mathbb{R}$. Seja S uma superfície imersa em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ dada por

$$X(\rho(s), \varphi(s,\tau)) = (\tanh \rho/2 \, \cos \varphi, \tanh \rho/2 \, \sin \varphi, \lambda(\rho) + \ell\varphi)\,,\ s, \tau \in \mathbb{R}$$

Mostre que a métrica induzida em S , tomando coordenadas cilíndricas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, está dada por

$$\mathrm{d}\mu^2 = (1 + \lambda'^2)\, \mathrm{d}\rho^2 + 2\ell\lambda' \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi + (\ell^2 + \sinh^2 \rho)\, \mathrm{d}\varphi^2$$

(3) Considerando $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, com a métrica esférica $\frac{4}{(1+|z|^2)^2}\,|dz|^2$, faça uma análise parecida com a que foi feita acima no item (2) considerando coordenadas cilíndricas (ρ, θ, t) em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, trocando $\sinh \rho \to \sin \rho$.

(4) Escreva a métrica produto em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, tomando coordenadas esféricas (θ, φ) de $\mathbb{S}^2$.

(5) Considere $\mathbb{R}^{1,n+1} := \mathbb{R}^{n+2}$ munido com a *métrica de Lorentz* $Q = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_3^3 \cdots + dx_{n+1}^2$. A seguinte superfície "spacelike" $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{1,n+1}$ com a *métrica Riemanniana induzida* dá origem ao *modelo de Minkowski* do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$:
$S := \{x = (x_0, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{n+2};\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1}, x_0 > 0, Q(x) = |\boldsymbol{x}|^2 - x_0^2 = -1\}$.
Por definição o grupo de isometrias de $\mathcal{S}$, denotado por $O^+(1, n+1)$ preserva esta métrica.

(a) Considere as matrizes

$$\begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 & \cdots & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Mostre que o conjunto de tais matrizes constitue um subgrupo $\Gamma \subset O^+(1, n+1)$ a 1-parâmetro de isometrias de $\mathcal{S}$

(b) Mostre que com a ajuda de uma "rotação horizontal", que é uma isometria de $\mathcal{S}$, pode-se levar qualquer ponto $(x_0, \boldsymbol{x}) \in \mathcal{S}$ num ponto da forma $v = (x_0, |\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_1) \in \mathcal{S}$, onde $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$. Logo como $v \in \mathcal{S}$, pode-se escrever v da forma $v = (\cosh s, \sinh s\, \boldsymbol{e}_1)$, para algum $s \in \mathbb{R}$.

(c) Mostre que com a ajuda do subgrupo Γ acima pode-se enviar v ao ponto $(1, 0)$, tomando $t = -s$.

(d) Conclua que o grupo de isometrias de $\mathcal{S}$ age transitivamente em $\mathcal{S}$.