LISTA 5 DE GEOMETRIA RIEMANNIANA 2007

RICARDO SA EARP

(1) Considere $\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2;\ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$. seja q um inteiro $q > 1$. Seja $\Gamma = \{1, \mathrm{e}^{2\pi 1/q}, \ldots, \mathrm{e}^{2\pi(q-1)/q}\}$, o grupo finito agindo em $\mathbb{S}^3$ da forma natural
$\mathrm{e}^{2\pi k/q} \cdot (z_1, z_2) = (\mathrm{e}^{2\pi k/q}\, z_1, \mathrm{e}^{2\pi k/q}\, z_2)$, $k = 0 \ldots q-1$.

  (a) Mostre que a Γ age como um subgrupo de isometrias de $\mathbb{S}^3$ (com a sua métrica) de modo própria e descontinuamente. A variedade $\mathbb{S}^3/\Gamma$ é chamada de *espaço lenticular*. Deduza que todas as geodésicas de $\mathbb{S}^3/\Gamma$ são curvas fechadas.

  (b) Seja $e_1 = (1, 0) \in \mathbb{S}^3$. Seja $\overline{e}_1$, a projeção de e_1 em $\mathbb{S}^3/\Gamma$. Encontre fórmulas explícitas para todas as geodésicas que passam por e_1. Estude a ação de Γ sobre as geodésicas de $\mathbb{S}^3$ e obtenha que nem todas as geodésicas do espaço lenticular $\mathbb{S}^3/\Gamma$, passando por $\overline{e}_1$, tem o mesmo comprimento. Generalize as demais geodésicas de $\mathbb{S}^3/\Gamma$.

(2) Considere o reticulado canônico de $\mathbb{R}^2$ dado por $\Gamma = \{(m, n),\ m, n \in \mathbb{Z}\}$. Estude as geodésicas do toro plano $\mathbb{R}^2/\Gamma$ classificando as fechadas e as não fechadas. Discuta a existência de geodésicas densas ou não.

(3) Defina a noção de métricas conformes sobre uma variedade M. Sejam U e V abertos do plano complexo $\mathbb{C}$. Seja $f : U \longrightarrow V$ um difeomorfismo que preserva a orientação. Mostre que
$f : U \longrightarrow V$ é uma aplicação conforme (f preserva ângulos, ou seja, f é holomorfa e $f'(z) \neq 0, \forall z \in U$); se e só se a métrica (sobre U) induzida por f da métrica Euclideana de V, é conforme à métrica Euclideana. Explicite esta métrica na forma $ds^2 = \lambda^2(z)|dz|^2$, $z = x + iy \in U, x, y \in \mathbb{R}$, determinando $\lambda(z)$.

A curvatura de Gauss de uma superfície Riemanniana é um invariante intrínseco (depende apenas da métrica). Em termos de coordenadas isotérmicas $z = x + iy$ pode ser escrita como

$$K = -\frac{\triangle \log \lambda}{\lambda^2}$$

onde a métrica em termos das coordenadas isotérmicas (conformes) $z = x + iy$, é dada por $\mathrm{d}s^2 = \lambda^2 |\,\mathrm{d}z|^2$.

(4) Considere o plano hiperbólico $\mathbb{H}^2 = \{z = x+iy,\ y > 0\}$ munido da métrica hiperbólica $\mathrm{d}s^2 = \dfrac{1}{(\Im z)^2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)$. Mostre que a curvatura de Gauss $K \equiv -1$.

Enuncie e reveja o teorema de Gauss Bonnet da Geometria Diferencial e mostre (usando GB) que não existem duas geodésicas distintas ligando dois pontos p e q de $\mathbb{H}^2$. Mostre que este fato não é verdade para uma superfície em geral.

(5) Considere a esfera unitária $\mathbb{S}^2 = \{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\}$ em $\Re^3$.

(a) Mostre que a *projeção estereográfica usual do pólo norte* é dada por

$$\Pi_N(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta} := E$$

(b) Mostre que a inversa é dada por

$$z \longmapsto \left(\frac{2\mathbb{R}E}{E\overline{E} + 1}, \frac{2\Im E}{E\overline{E} + 1}, \frac{E\overline{E} - 1}{E\overline{E} + 1} \right)$$

(c) Mostre que a métrica Euclideana $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\xi^2 + \mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\zeta^2$ em $\Re^3$ induzida em $\mathbb{S}^2$, induz em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a seguinte métrica

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{4}{(1 + E\overline{E})^2}(\mathrm{d}(\mathbb{R}E)^2 + \mathrm{d}(\Im E)^2)\cdot$$

(d) Mostre que a curvatura de Gauss da referida métrica é $K \equiv +1$.

(e) Mostre que uma isometria positiva da referida métrica é o conjunto das transformações de Möbius da forma

$$T(z) = \frac{az - \overline{c}}{cz + \overline{a}}$$

satisfazendo $|a|^2 + |c|^2 = 1,\ a, c \in \mathbb{C}$.

(f) Mostre que para cada tal isometria positiva T correspondem z e $\dfrac{-1}{\overline{z}}$ fixados por T. Note que T é "elíptica", você sabe justificar esta terminologia ?

(g) A aplicação $z \mapsto 1/z$ é uma isometria positiva ? Descreva-a geometricamente.

(6) Mostre diretamente que as seguintes transformações são isometrias de $\mathbb{H}^2$. Identifique as que são positivas.

(a) Translações Euclideanas horizontais.

(b) Homotetias com centro em $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ que preservam $\mathbb{H}^2$.

(c) Inversões com respeito à semi-círculos de raio R com centro x_0 em $\partial_\infty \mathbb{H}^2$, dadas por $z \mapsto \dfrac{R^2}{\overline{z} - x_0} + x_0,\ R > 0, x_0 \in \mathbb{R}$.

(7) Classifique todas as geodésicas de $\mathbb{H}^2$.

(8) Usando o teorema de Gauss-Bonnet, mostre que a soma dos ângulos internos de um triângulo (geodésico) em $\mathbb{H}^2$ é estritamente inferior a π.

(9) Mostre com todos os detalhes que dadas duas geodésicas completas c e γ do plano hiperbólico e, dados $p \in c$ e $q \in \gamma$, existe uma isometria positiva f de $\mathbb{H}^2$ levando c sobre γ e p em q.

(10) Descreva com todos os detalhes as isometrias do disco de Poincaré $\mathcal{D} = \{w \in \mathbb{C}; |w| < 1, ds^2 = \dfrac{4}{(1-|w|^2)^2}|dw|^2\}$, explicitando uma isometria do plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ em $\mathcal{D}$. Determine todas as geodésicas de $\mathcal{D}$.

(11) Mostre que o círculo hiperbólico de raio hiperbólico ρ centrado no ponto i de $\mathbb{H}^2$ está dado por

$$x = \sinh\rho\cos\theta$$
$$y = \sinh\rho\sin\theta + \cosh\rho, \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Logo, é um círculo Euclideano de centro $(0, \cosh\rho)$ e raio $R = \sinh\rho$.

(12) Descreva as famílias das *curvas equidistantes*, *horociclos* e *círculos* (hiperbólicos), em cada um dos modelos do semi-plano e do disco do plano hiperbólico.

(13) Mostre que o comprimento de um círculo hiperbólico em $\mathcal{D}$ de raio hiperbólico $\rho > 0$ é $2\pi\sinh\rho$ e que a área de um disco hiperbólico em $\mathcal{D}$ de raio hiperbólico ρ é $4\pi\sinh^2\rho/2$.

(14) Seja $\mathbb{H}^3 := \{(x, y, z);\ z > 0\}$. Considere a semi-esfera $S = S_r(a) := \{p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ |p - a|_{\mathbb{R}^3} = r, z > 0\}$, onde $a \in \{(x, y, z);\ z = 0\}$ e $r > 0$. Considere a em reflexão, ou *simetria* ou *inversão* com respeito à S definida por

$$I(p) = a + \frac{r^2}{|p-a|^2_{\mathbb{R}^3}} \cdot (p - a)$$

(a) Mostre que I é um difeomorfismo anti-conforme preservando $\mathbb{H}^3$, levando $\partial_\infty\mathbb{H}^3$ em si mesmo, deixando fixos todos os pontos de S e satisfazendo $I \circ I(p) = p$, para todos os pontos $p \in \mathbb{H}^3$. Mostre que I provém de uma única inversão em um círculo em $\partial_\infty\mathbb{H}^3 \equiv \mathbb{C} \cap \{\infty\}$.

(b) Mostre que I leva as calotas esféricas, , semi-planos verticais, semi-planos inclinados, planos horizontais, esferas em $\mathbb{H}^3$ em calotas esféricas, ou semi-planos verticais, ou semi-planos inclinados, ou planos horizontais ou esferas em $\mathbb{H}^3$. Deduza que I leva círculos ou retas em círculos ou retas. Faça um exame minucioso e discuta cada caso separadamente examinando todas as possibilidades como você fez, anteriormente, com as inversões em círculos.

(c) Mostre que se $p, q \in \mathbb{H}^3$, então

$$|I(p) - I(q)|_{\mathbb{R}^3} = \frac{r^2 |p-q|_{\mathbb{R}^3}}{|p-a|_{\mathbb{R}^3}|q-a|_{\mathbb{R}^3}}$$

Considere $\mathbb{H}^3$ o espaço hiperbólico munido da métrica hiperbólica

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{z^2} \cdot \left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\right)$$

(15) Mostre *com todos os detalhes* que a inversão I do item 1) é uma isometria *negativa* de $\mathbb{H}^3$.

Lembremos que as *geodésicas* de $\mathbb{H}^3$ são as semi-retas verticais contidas em $\mathbb{H}^3$ partindo do bordo assimptótico ($\partial_\infty \mathbb{H}^3$) e os semi-círculos em $\mathbb{H}^3$ ortogonais à $\partial_\infty \mathbb{H}^3$.

(16) Mostre que de fato as curvas descritas logo acima são todas as geodésicas de $\mathbb{H}^3$. Mostre que dada duas geodésicas γ_1 e γ_2 existe uma isometria positiva de $\mathbb{H}^3$ levando γ_1 em γ_2.

(17) Mostre que a rotação *em torno de uma geodésica* γ, também chamada de rotação hiperbólica, é uma isometria positiva de $\mathbb{H}^3$. Descreva-a com detalhes geometricamente. Mostre que a rotação hiperbólica leva pedaços de planos ou esferas em $\mathbb{H}^3$ em pedaços de planos ou esferas em $\mathbb{H}^3$.

(18) Mostre que a translação *ao longo de uma geodésica* γ, ou simplesmente translação hiperbólica, ou mais simplesmente ainda translação é uma isometria positiva de $\mathbb{H}^3$. Mostre que a translação hiperbólica leva pedaços de planos ou esferas em $\mathbb{H}^3$ em pedaços de planos ou esferas em $\mathbb{H}^3$. Descreva-a com detalhes geometricamente. Considere $B^3 := \{p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ o *modelo da bola* do espaço hiperbólico munido da métrica $\mathrm{d}s^2 = \dfrac{4}{\left(1 - (x^2 + y^2 + z^2)\right)^2} \cdot (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)$.

(19) Mostre que $F : B^3 \to \mathbb{H}^3$ definida por $F(x, y, z) = \dfrac{2(x, y, z+1)}{x^2 + y^2 + (z+1)^2} - (0, 0, 1)$ produz uma isometria global de B^3 em $\mathbb{H}^3$ que inverte orientações . Descreva geometricamente F e dê sua inversa. Além disso modifique ligeiramente F e obtenha uma isometria positiva. Descreva as geodésicas no modelo da bola.
NOTA:
Dizemos que uma superfície M é *totalmente geodésica*, se dado um ponto p de M tem-se que toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de $\mathbb{H}^3$. Dizemos que uma superfície M é uma superfície *equidistante* se M é o lugar geométrico dos pontos em $\mathbb{H}^3$ que possuem mesma distância fixada ρ de uma superfície totalmente geodésica. Dizemos que M é uma *esfera geodésica* se M é o lugar geométrico dos pontos em $\mathbb{H}^3$ que possuem mesma

distância fixada ρ de um ponto fixado p. Dizemos que M é uma horosfera se existe $p \in M$ tal que M é o limite em $\mathbb{H}^3$ de esferas de raios variados ρ que passam por p fazendo $\rho \to \infty$. Tais superfícies geométricas são totalmente umbílicas em $\mathbb{H}^3$.