LISTA 6 DE GEOMETRIA RIEMANNIANA 2007

RICARDO SA EARP

(1) Considere no espaço produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com coordenadas (globais) (x, y, t), a métrica produto $d\sigma^2 = \dfrac{dx^2}{y^2} + \dfrac{dy^2}{y^2} + dt^2$.

(2) Mostre que o comprimento de uma curva suave C parametrizada por $\alpha(\tau) = (x(\tau), y(\tau), t(\tau)), \tau \in [a, b]$, é dado por

$$\ell_C = \int_a^b \sqrt{\frac{x'^2(\tau) + y'^2(\tau)}{y^2(\tau)} + t'^2(\tau)}\ \mathrm{d}\tau$$

Em cada plano $t = \text{cst}$ obtemos uma curva numa cópia de $\mathbb{H}^2$. Fazendo $t \equiv 0$, na fórmula acima obtemos o comprimento de uma curva em $\mathbb{H}^2$.

(3) Mostre que as translações Euclideanas horizontais: $(x, y) \mapsto (x + \lambda, y)$ e as homotetias oriundas de $(0, 0)$: $(x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$ são isometrias positivas de $\mathbb{H}^2$ que se estendem ao produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Vamos focar em superfícies S neste espaço que são *gráficos verticais*, i.e dadas por uma função $z = u(x, y)$, $(x, y) \in U$, sendo $U \subset \mathbb{H}^2 \times \{0\}$ (U aberto).

(a) Dê uma parametrização de S mostrando que $N = \dfrac{1}{\sqrt{1 + y^2(u_x^2 + u_y^2)}} \left(-u_x y^2, -u_y y^2, 1\right)$, é um normal unitário adaptado.

Agora, assuma que a equação da curvatura média H do gráfico vertical está dada por

$$\frac{2H}{y^2}\left(1 + y^2u_x^2 + y^2u_y^2)\right)^{3/2} = (1 + y^2u_x^2)u_{yy} + (1 + y^2u_y^2)u_{xx} - 2y^2u_xu_yu_{xy} - yu_y(u_x^2 + u_y^2)$$

(b) Mostre que a equação da curvatura média é da *forma da divergência*, podendo ser re-escrita da forma

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + y^2\left|\nabla u\right|^2}}\right) = \frac{2H}{y^2}$$

onde ∇u denota o gradiente Euclideano.

(c) Dado $\ell \in \mathbb{R}$, mostre que o semi-plano Euclideano $t = \ell x, y > 0$, dá origem a uma família a 1-parâmetro de superfícies mínimas ($H = 0$) simplesmente conexas (gráficos verticais), "completas".

(d) Dada $H > 0$ (constante) satisfazendo $4H^2 < 1$, mostre que

$$t = \lambda(y, \ell) = \frac{-2H}{\sqrt{1-4H^2}} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{1+\ell^2 y^2} - 1}{\sqrt{1+\ell^2 y^2} + 1} \right)^{1/2} + \sqrt{1+\ell^2 y^2} \right] + \ell x \, (\ell \neq 0)$$

é um uma família de gráficos verticais de curvatura média constante H $(4H^2 < 1)$.

(e) Mostre que $t = \frac{\ell}{2} \ln (x^2 + y^2)$, $y > 0$, define uma família de gráficos mínimos inteiros.

(f) Seja S o gráfico dado por

$$t = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}, \qquad y > 0$$

(i) Mostre que S é um gráfico vertical inteiro de curvatura média $1/2$.

(ii) Mostre que S é invariante por translações horizontais hiperbólicas.

(iii) Mostre que a curva de nível $\{z = 1\}$ é uma geodésica e que as curvas de níveis $\{z = c, c > 1\}$ são curvas equidistantes de $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$.

(g) Seja S dada por

$$t = \ln \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2} + y}{x} \right), \qquad y > 0, x > 0$$

(i) Mostre que S é uma superfície mínimas, invariante por translações hiperbólicas.

(ii) Mostre que S toma valores ∞ no semi-eixo positivo dos y, e toma valores assimptóticos 0 no semi-eixo positivo dos x.

Vamos ver agora um gráfico com $H = 1/2$ invariante por rotações: Lembre que o círculo hiperbólico de raio hiperbólico ρ centrado no ponto i de $\mathbb{H}^2$ está dado por

$$x = \sinh \rho \cos \theta$$
$$y = \sinh \rho \sin \theta + \cosh \rho, \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

é um círculo Euclideano de centro $(0, \cosh \rho)$ e raio $R = \sinh \rho$.

(h) Seja o gráfico dado por

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}}{\sqrt{y}},\ y > 0$$

Mostre que é invariante por rotações em torno do eixo vertical t, mostrando que $t = 2\cosh(\rho/2)$ não depende de θ.

(i) Tomando como modelo de $\mathbb{H}^2$, o modelo do disco de Poincaré (com coordenadas (u, v), $u^2+v^2 < 1$), mostre que a fórmula do gráfico (no produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$) é $t = \dfrac{2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$. Desenhe neste modelo o gráfico.

Vamos olhar agora *espaço hiperbólico tridimensional* $\mathbb{H}^3$.

Seja $\mathbb{H}^3 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3;\quad w > 0\}$ munido da métrica $\dfrac{1}{w^2}\left(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2 + \mathrm{d}w^2\right)$

As superfícies totalmente umbílicas de $\mathbb{H}^3$ são as seguintes:

- *Os planos totalmente geodésicos.* Estes são os semi-planos verticais e as semi-esferas ortogonais à $\{w = 0\}$.
- *As esferas hiperbólicas.* São também esferas Euclideanas inteiramente contidas em $\mathbb{H}^3$.
- *As horosferas.* As horosferas são as esferas Euclideanas tangente à $\{w = 0\}$ e os planos Euclideanos horizontais.
- *As superfícies equidistantes.* Estas são o lugar dos pontos que estão a uma mesma distância de um plano totalmente geodésico fixado. Tais superfícies são semi-planos inclinados e calotas esféricas que fazem um ângulo $0 < \phi < \pi/2$ com $\{w = 0\}$.

Agora gostaríamos de realçar a ligação entre as superfícies *mínimas* de $\mathbb{R}^3$ e suas *primas* em $\mathbb{H}^3$: Dada uma imersão conforme mínima $X : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$, de um domínio simplesmente conexo U em $\mathbb{R}^3$, segue de certo resultado fundamental da geometria, que podemos associar uma imersão conforme de *curvatura média* 1 em $\mathbb{H}^3$ (localmente isométrica à mínima em $\mathbb{R}^3$) ; e vice-versa

Um fato surpreendente é que a superfície *associada* no espaço hiperbólico tridimensional $\mathbb{H}^3$ a certo catenóide de $\mathbb{R}^3$ é uma superfície invariante por translações Euclideanas horizontais, cuja curva geradora já tinha sido estudada por *Poleni* em *1729.* Tal curva é conhecida como *courbe des forçats.*

Seja a curva de Poleni $u = s - 2\tanh s,\ w = 2/\cosh s$, e a prima do catenóide em $\mathbb{H}^3$. Fazendo translações Euclideanas horizontais na direção do eixo v, (que são isometrias de $\mathbb{H}^3$) obtemos uma superfície de curvatura média 1 de $\mathbb{H}^3$ associada (localmente isométrica) a certo catenóide de $\mathbb{R}^3$.

(4) Obtenha explicitamente uma parametrização desta superfície em $\mathbb{H}^3$, cuja curva geradora é a curva descoberta por Poleni esboçando o seu gráfico.

(5) Lembre que (veja a Lista 2), com a identificação do espaço de Heisenberg Nil_3 com o espaço Euclideano $\mathbb{R}^3$, dada pela parametrização global usando a aplicação exponencial, o produto de
$X_1 = (x_1, y_1, t_1)$ e $X_2 = (x_2, y_2, t_2)$ no espaço de Heisenberg está dado por

$$(x_1, y_1, t_1) * (x_2, y_2, t_2) = \left(x_1 + x_2, y_1 + y_2, t_1 + t_2 + \frac{x_1 y_2}{2} - \frac{x_2 y_1}{2}\right).$$

Lembre ainda que a álgebra de Lie, em termos da base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ está dada por $[e_1, e_2] = e_3$, e $[e_i, e_3] = 0, i = 1, 2$. Uma base dos campos de vetores invariantes à esquerda, em coordenadas exponenciais, está dada por $E_1 = \dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{y}{2}\dfrac{\partial}{\partial t}$, $E_2 = \dfrac{\partial}{\partial y} + \dfrac{x}{2}\dfrac{\partial}{\partial t}$ e $E_3 = \dfrac{\partial}{\partial t}$.

E_1, E_2 são chamados de *campos horizontais* e E_3 é chamado de *campo vertical*.

Defina uma uma métrica no espaço de Heisenberg Nil_3 (identificado c/ $\mathbb{R}^3$), *invariante à esquerda*, impondo que $\{e_1, e_2, e_3\}$, seja uma base ortornormal na identidade e que $\{E_1, E_2, E_3\}$, constitua uma base ortornormal de campos invariantes à esquerda.

(6) Mostre que a expressão desta métrica (Heisenberg visto como $\mathbb{R}^3$, usando coordenadas exponenciais) está dada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{1}{2} y dx - \frac{1}{2} x dy + dt\right)^2$$

(7) Considere o campo de planos em Nil_3 gerado por E_1, E_2. Estude geometricamente este campo ao longo dos eixos, x e y, respectivamente.

(8) Sejam x_0, y_0, θ números reais fixados. Mostre que as aplicações

$$(x, y, t) \mapsto \left(x + x_0, y + y_0, t + t_0 + \frac{x_0 y - y_0 x}{2}\right)$$
$$(x, y, t) \mapsto (\cos\theta x - \sin\theta y, \sin\theta x + \cos\theta y, t)$$

são isometrias de Nil_3. Dê uma interpretação geométrica.

(9) Considere os campos $V_1 = (1, 0, \frac{y}{2})$ e $V_2 = (0, 1, -\frac{x}{2})$ com fluxos ϕ_t e ψ_t, respectivamente. Mostre que V_1 e V_2 são *campos de Killing*, ou seja os fluxos ϕ_t e ψ_t são isometrias de Nil_3. Tais isometrias são chamadas de *translações horizontais*. Mostre que E_3 é também um campo de killing gerando "translações verticais".

(10) Seja S um gráfico vertical, i.e S é o gráfico de uma função $t = f(x,y)$, $(x,y) \in U$ (U aberto do plano xy). Dê uma parametrização de S e mostre que o normal unitário está dado por $N = \dfrac{\left(-(f_x + \frac{y}{2})E_1 - (f_y - \frac{x}{2})E_2 + \frac{\partial}{\partial t}\right)}{\sqrt{1 + (f_x + \frac{y}{2})^2 + (f_y - \frac{x}{2})^2}}$.

(11) Assuma que a equação da superfície mínima está dada por

$$\left(1 + (f_y - \frac{x}{2})^2\right) f_{xx} - 2(f_y - \frac{x}{2})(f_x + \frac{y}{2})f_{xy} + \left(1 + (f_x + \frac{y}{2})^2\right) f_{yy} = 0$$

(a) Mostre que a equação acima pode ser reescrita da forma

$$\operatorname{div}\left(\frac{Y}{\sqrt{1 + |Y|^2}}\right) = 0$$

onde $Y := \nabla f + (\frac{y}{2}, -\frac{x}{2})$.

(b) Mostre que $t = \dfrac{xy}{2}$, determina um gráfico mínimo inteiro invariante por um grupo a 1-parâmetro de translações horizontais.