LISTA 7 DE GEOMETRIA RIEMANNIANA 2007

RICARDO SA EARP

(1) Considere $\mathcal{D}$ o disco de Poincaré.

(a) Mostre a identidade

$$1-\left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right|^2=\frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\overline{z}w|^2}, \qquad \text{se } \overline{z}w\neq 1$$

Conclua que as quantidades

$$\left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right|^2 \quad \text{e} \quad \frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\overline{z}w|^2}$$

são invariante conforme de $\mathcal{D}$ ($z,w\in\mathcal{D}$) (ou seja invariantes por mapeamentos conformes).

(b) Mostre que

$$\tanh\left(\frac{d_{\mathcal{D}}(z,w)}{2}\right)=\left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right|^2$$

* * *

Assuma o *teorema de Schwarz-Pick:*

Seja f uma aplicação holomorfa de $\mathcal{D}$ em $\mathcal{D}$ e sejam $w_1,w_2,w\in\mathcal{D}$. Tem-se que:

$$\frac{|\ f(w_1)-f(w_2)\ |}{|\ 1-f(w_1)\overline{f(w_2)}\ |}\leqslant\frac{|\ w_1-w_2\ |}{|\ 1-w_1\overline{w_2}\ |} \tag{1}$$

$$\frac{|\ f'(w)\ |}{1-|\ f(w)\ |^2}\leqslant\frac{1}{1-|\ w\ |^2} \tag{2}$$

Além disso, se f é transformação conforme de $\mathcal{D}$, (1) e (2) são igualdades. Reciprocamente, se temos a igualdade em (1) para um par (w_1,w_2) com $w_1\neq w_2$, ou se (2) é uma igualdade em um ponto, então f est une tranformation conforme de $\mathcal{D}$.

(c) Deduza que uma aplicação holomorfa de $\mathcal{D}$ em $\mathcal{D}$, que não é um mapeamento conforme, encurta (diminue) estritamente a distância hiperbólica, o comprimento hiperbólico e a área hiperbólica.

(d) Sejam M e N duas superfícies de Riemann munidas da métrica hiperbólica obtida no item anterior (ou seja, o recobrimento conforme de ambas superfícies é o disco unitário $\mathcal{D}$). Assuma primeiro que ambas M e N sejam simplesmente conexas. Mostre que se $f : M \to N$ é uma aplicação holomorfa da superfície de Riemann M na superfície de Riemann N que não é uma equivalência conforme então f encolhe estritamente o comprimento das curvas. No caso geral demonstre o seguinte: Ou bem, $f : M \to N$ é uma isometria local na métrica hiperbólica e uma aplicação de recobrimento, ou bem $f : M \to N$ encolhe estritamente o comprimento das curvas.

(2) Mostre *com todos os detalhes* que $\mathbb{C}$ não admite uma métrica completa $\mathrm{d}s^2 := \rho^2(z)|\,\mathrm{d}z|^2$ com curvatura de Gauss $K \equiv -1$. *Sugestão* : Raciocine por absurdo, supondo que $\mathbb{C}$ admite uma métrica com $K \equiv -1$. Mostre primeiramente que a métrica $\lambda^2(z)|\,\mathrm{d}z|^2;\ \lambda(z) = \dfrac{2R}{R^2 - |z|^2}$, é uma métrica completa na bola aberta de raio R, digamos $\mathcal{D}_R$, centrada na origem com curvatura de Gauss identicamente igual a -1. Em seguida mostre que $\log\lambda - \log\rho$ admite um mínimo global em $\mathcal{D}_R$. Deduza que $\lambda \geqslant \rho$ em $\mathcal{D}_R$, inferindo daí o resultado desejado.

(3) (*A ultramétrica de Ahlfors*) Geralmente uma métrica Riemanniana é dada em "coordenadas isotérmicas $z = x + iy$"(ou conforme) na seguinte forma

$$\mathrm{d}s^2 = \rho^2(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)$$

onde $\rho > 0$ e $\mathrm{d}s$ é conforme à métrica Euclideana. A quantidade

$$K(\rho) := -\frac{\triangle \log \rho}{\rho^2}, \quad \rho \in C^2$$

é a bem conhecida *curvatura de Gauss* da métrica. Já vimos que a curvatura de Gauss da métrica hiperbólica é -1, e que $K \equiv 1$ para a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$.

(a) Mostre que $K(\rho)$ é um invariante conforme. Mais precisamente, dada uma aplicação conforme $w = f(z)$, define-se $\tilde{\rho}(w)$ obrigando que $\rho|\,\mathrm{d}z| = \tilde{\rho}|\,\mathrm{d}w|$, ou mais explicitamente, $\rho(z) = \tilde{\rho}(f(z))|f'(z)|$.
Doravante condideraremos a métrica hiperbólica em $\mathcal{D}$ denotada por $\lambda(z)|\,\mathrm{d}z|$, isto é $\lambda(z) = 2/(1 - |z|^2)$.

(b) Mostre que se ρ satisfaz $K(\rho) \leqslant -1$ em $\mathcal{D}$, então $\lambda(z) \geqslant \rho(z)$ para todo $z \in \mathcal{D}$. *Sugestão* : Assuma primeiramente que ρ tem extensão contínua e estritamente positiva ao disco fechado, e em seguida reduza a situação geral a este caso.

(c) Uma métrica $\rho|\,\mathrm{d}z|$, $\rho \geqslant 0$ é chamada de ultramétrica num domínio Ω se tem as seguintes propriedades:

- ρ é semi-contínua superiormente.
- Para cada $z_0 \in \Omega$ com $\rho(z_0) > 0$ existe uma "métrica suporte" ρ_0 de classe C^2 numa vizinhança V de z_0, tal que $\triangle \log \rho_0 \geqslant \rho_0^2$ e $\rho \geqslant \rho_0$ em V, com $\rho(z_0) = \rho_0(z_0)$. Note que $\log \lambda - \log \rho$ é semi-contínua inferiormente, a existência de um mínimo no raciocínio acima está assegurada. Tal mínimo será também um mínimo local de $\log \lambda - \log \rho_0$, e o resto do raciocínio se aplica como antes. A desigualdade $\lambda(z) \geqslant \rho(z)$ pode ser verificada sempre que ρ é ultramétrica. Mostre a seguinte versão forte do *lema de Schwarz*:

(d) Seja f uma função analítica de $\mathcal{D}$ em uma região Ω na qual está dada uma métrica ultrahiperbólica ρ. Mostre que

$$\rho(f(z))|f'(z)| \leqslant \frac{2}{(1 - |z|^2)}$$

Observe que a quantidade da esquerda é uma métrica ultrahiperbólica em $\mathcal{D}$, os zeros de $f'(z)$ são as singularidades desta métrica. Você saberia dar exemplos de métricas ultrahiperbólicas em $\mathcal{D}$?