

LISTA 8 DE GEOMETRIA RIEMANNIANA 2007

RICARDO SA EARP

- (1) Lembre que (veja a Lista 6), da identificação do espaço de Heisenberg  $\text{Nil}_3$  com o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , dada pela parametrização global usando a aplicação exponencial. Lembre também que na métrica do espaço de Heisenberg  $\text{Nil}_3$ , uma base ortornormal dos campos de vetores invariantes à esquerda, em coordenadas exponenciais, está dada por  $E_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $E_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial t}$  e  $E_3 = \frac{\partial}{\partial t}$ .

$E_1, E_2$  são chamados de *campos horizontais* e  $E_3$  é chamado de *campo vertical*.

Lembre ainda que a expressão desta métrica (Heisenberg visto como  $\mathbb{R}^3$ , usando coordenadas exponenciais) está dada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \left( \frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy + dt \right)^2$$

Seja  $\bar{\nabla}$  a conexão de  $\text{Nil}_3$ .

(a) Mostre que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{E_1} E_1 &= 0 & \bar{\nabla}_{E_2} E_1 &= -\frac{\partial}{2\partial t} & \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} E_1 &= -\frac{1}{2}E_2 \\ \bar{\nabla}_{E_1} E_2 &= \frac{\partial}{2\partial t} & \bar{\nabla}_{E_2} E_2 &= 0 & \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} E_2 &= \frac{1}{2}E_1 \\ \bar{\nabla}_{E_1} \frac{\partial}{\partial t} &= -\frac{1}{2}E_2 & \bar{\nabla}_{E_2} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{1}{2}E_1 & \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

*Sugestão:* Demonstre antes que  $[E_1, E_2] = \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $[E_1, \frac{\partial}{\partial t}] = 0$ ,  $[E_2, \frac{\partial}{\partial t}] = 0$ .

- (b) Seja  $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$  a parametrização global de um gráfico vertical dado por uma função  $t = f(x, y)$  definida num domínio  $\Omega$ . Calcule o referencial adaptado  $\{X_x, X_y\}$  em termos do referencial  $\{E_1, E_2, \frac{\partial}{\partial t}\}$ . Calcule os coeficientes da primeira forma fundamental  $g_{11}, g_{12}, g_{22}$  da imersão. Seja  $N = \frac{(-(f_x + \frac{y}{2})E_1 - (f_y - \frac{x}{2})E_2 + \frac{\partial}{\partial t})}{\sqrt{1 + (f_x + \frac{y}{2})^2 + (f_y - \frac{x}{2})^2}}$ , normal unitário

(veja a Lista 6). Calcule também os coeficientes da segunda forma fundamental  $b_{11} = \langle -\nabla_{X_x} N, X_x \rangle$ ,  $b_{22} = \langle -\nabla_{X_y} N, X_y \rangle$ ,  $b_{12} = \langle -\nabla_{X_x} N, X_y \rangle$ . Seja  $H = H(N)$  a curvatura média. Usando a fórmula clássica

$$2H = \frac{g_{11}b_{11} + g_{22}b_{22} - 2g_{12}b_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

Deduza a equação da curvatura média. Em particular, obtenha a equação do gráfico mínimo no espaço de Heisenberg dada na Lista 6.

- (2) Novamente, considere o espaço produto  $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$  munido da métrica produto ( $\mathbb{M}$  é uma variedade Riemanniana (superfície) de dimensão 2). Assim  $(x, y, t)$  são coordenadas locais em  $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$  ( $z = x + iy$  são coordenadas conformes (ou isotérmicas) em  $\mathbb{M}$  e  $t$  é a coordenada usual de  $\mathbb{R}$ ). Seja  $\Omega \subset \mathbb{C}$  um domínio e seja  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{M} \times \mathbb{R}$ ,  $w \mapsto (h(w), f(w))$ ,  $w = u + iv$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$  uma imersão de  $\Omega$  em  $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$  (imagina  $h(\Omega) \subset V$ ). Diz-se que  $h(w)$  é a componente horizontal e que  $f(w)$  é a componente vertical. Seja  $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\partial_y := \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$ , o referencial local do espaço tangente, onde  $\partial_x, \partial_y$  é um referencial do plano tangente à  $\mathbb{M}$  adaptado à  $f$  e  $\partial_t$  é o campo vertical canônico tangente à “reta”  $t \mapsto (*, t)$ ,  $* \in \mathbb{M}$ .

Relembre a notação complexa: Se  $g$  é uma função suave diferenciável (complexa) em  $\Omega$  então, define-se os operadores (complexos)  $g_w := \frac{1}{2}(g_u - ig_v)$ , e  $g_{\bar{w}} := \frac{1}{2}(g_u + ig_v)$ .

- (a) Seja  $\nabla$  a conexão Riemanniana de  $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$ . Mostre que:

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_x} \partial_x &= \frac{\sigma_x}{\sigma} \partial_x - \frac{\sigma_y}{\sigma} \partial_y \\ \nabla_{\partial_y} \partial_y &= -\frac{\sigma_x}{\sigma} \partial_x + \frac{\sigma_y}{\sigma} \partial_y \\ \nabla_{\partial_y} \partial_x &= \nabla_{\partial_x} \partial_y = \frac{\sigma_y}{\sigma} \partial_x + \frac{\sigma_x}{\sigma} \partial_y \\ \nabla_{\partial_x} \partial_t &= \nabla_{\partial_y} \partial_t = \nabla_{\partial_t} \partial_t = \nabla_{\partial_t} \partial_x = \nabla_{\partial_t} \partial_y = 0 \end{aligned}$$

- (b) Seja  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{M} \times \mathbb{R}$ ,  $w \mapsto (h(w), f(w))$ ,  $w = u + iv \in \Omega$  uma imersão de um domínio  $\Omega \subset \mathbb{C}$  em  $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$ . Mostre que

$$\begin{aligned} \nabla_{X_u} X_u &= \left( \Re h_{uu} + ((\Re h_u)^2 - (\Im h_u)^2) \frac{\sigma_x}{\sigma} + 2\Re h_u \Im h_u \frac{\sigma_y}{\sigma} \right) \partial_x \\ &\quad + \left( \Im h_{uu} + ((\Im h_u)^2 - (\Re h_u)^2) \frac{\sigma_y}{\sigma} + 2\Re h_u \Im h_u \frac{\sigma_x}{\sigma} \right) \partial_y + f_{uu} \partial_t \\ &= \left( \Re h_{uu} + (h_w + h_{\bar{w}})^2 \frac{\sigma_z}{\sigma} + (\bar{h}_w + \bar{h}_{\bar{w}})^2 \frac{\sigma_{\bar{z}}}{\sigma} \right) \partial_x \\ &\quad + \left( \Im h_{uu} - i(h_w + h_{\bar{w}})^2 \frac{\sigma_z}{\sigma} + i(\bar{h}_w + \bar{h}_{\bar{w}})^2 \frac{\sigma_{\bar{z}}}{\sigma} \right) \partial_y + f_{uu} \partial_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_v} X_v &= \left( \Re h_{vv} + ((\Re h_v)^2 - (\Im h_v)^2) \frac{\sigma_x}{\sigma} + 2\Re h_v \Im h_v \frac{\sigma_y}{\sigma} \right) \partial_x \\
&\quad + \left( \Im h_{vv} + ((\Im h_v)^2 - (\Re h_v)^2) \frac{\sigma_y}{\sigma} + 2\Re h_v \Im h_v \frac{\sigma_x}{\sigma} \right) \partial_y + f_{vv} \partial_t \\
&= \left( \Re h_{vv} - (h_w - h_{\bar{w}})^2 \frac{\sigma_z}{\sigma} - (\bar{h}_w - \bar{h}_{\bar{w}})^2 \frac{\sigma_{\bar{z}}}{\sigma} \right) \partial_x \\
&\quad + \left( \Im h_{vv} + i(h_w - h_{\bar{w}})^2 \frac{\sigma_z}{\sigma} - i(\bar{h}_w - \bar{h}_{\bar{w}})^2 \frac{\sigma_{\bar{z}}}{\sigma} \right) \partial_y + f_{vv} \partial_t \\
\nabla_{X_u} X_v &= \nabla_{X_v} X_u = \left( \Re h_{uv} + (\Re h_u \Re h_v - \Im h_u \Im h_v) \frac{\sigma_x}{\sigma} + (\Re h_u \Im h_v + \Im h_u \Re h_v) \frac{\sigma_y}{\sigma} \right) \partial_x \\
&\quad + \left( \Im h_{uv} + (\Re h_u \Im h_v + \Im h_u \Re h_v) \frac{\sigma_x}{\sigma} + (\Im h_u \Im h_v - \Re h_u \Re h_v) \frac{\sigma_y}{\sigma} \right) \partial_y \\
&\quad + f_{uv} \partial_t \\
&= \left( \Re h_{uv} + i(h_w^2 - h_{\bar{w}}^2) \frac{\sigma_z}{\sigma} + i(\bar{h}_w^2 - \bar{h}_{\bar{w}}^2) \frac{\sigma_{\bar{z}}}{\sigma} \right) \partial_x \\
&\quad + \left( \Im h_{uv} + (h_w^2 - h_{\bar{w}}^2) \frac{\sigma_z}{\sigma} - (\bar{h}_w^2 - \bar{h}_{\bar{w}}^2) \frac{\sigma_{\bar{z}}}{\sigma} \right) \partial_y + f_{uv} \partial_t
\end{aligned}$$

*Sugestão:* Calcule  $\nabla_{X_u} X_u$ ,  $\nabla_{X_v} X_v$  e  $\nabla_{X_v} X_u$ , em termos das derivadas das componentes horizontal  $h$  e vertical  $f$ . Use a terminologia complexa para obter as identidades pedidas.

- (c) Assuma que  $X : \Omega \looparrowright \mathbb{M} \times \mathbb{R}$ ,  $w \mapsto (h(w), f(w))$ ,  $w \in \Omega$  é uma imersão conforme com métrica induzida  $ds^2 = \mu^2 |dw|^2$ . Mostre que o vetor curvatura média  $\vec{H}$  é dado por

$$2\mu^2 \vec{H} = 4\Re \left( h_{w\bar{w}} + 2\frac{\sigma_z}{\sigma} h_w h_{\bar{w}} \right) \partial_x + 4\Im \left( h_{w\bar{w}} + 2\frac{\sigma_z}{\sigma} h_w h_{\bar{w}} \right) \partial_y + \Delta f \partial_t$$

*Sugestão:* Observe que

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_u} X_u + \nabla_{X_v} X_v &= \left( \Re h_{uu} + \Re h_{vv} + 4h_w h_{\bar{w}} \frac{\sigma_z}{\sigma} + 4\bar{h}_w \bar{h}_{\bar{w}} \frac{\sigma_{\bar{z}}}{\sigma} \right) \partial_x \\
&\quad + \left( \Im h_{uu} + \Im h_{vv} - 4ih_w h_{\bar{w}} \frac{\sigma_z}{\sigma} + 4i\bar{h}_w \bar{h}_{\bar{w}} \frac{\sigma_{\bar{z}}}{\sigma} \right) \partial_y + \Delta f \partial_t \\
&= 4\Re \left( h_{w\bar{w}} + 2\frac{\sigma_z}{\sigma} h_w h_{\bar{w}} \right) \partial_x + 4\Im \left( h_{w\bar{w}} + 2\frac{\sigma_z}{\sigma} h_w h_{\bar{w}} \right) \partial_y + \Delta f \partial_t
\end{aligned}$$

*Observação:*

Dizemos que uma aplicação

$h : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow (\mathbb{M}, \sigma^2 |dz|^2)$ ,  $w \mapsto h(w)$  é harmônica, se satisfaz

$$h_{w\bar{w}} + 2\frac{\sigma_z}{\sigma} h_w h_{\bar{w}} = 0 \quad (1)$$

Associamos à tal aplicação harmônica  $h : \Omega \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{M}$ , uma diferencial holomorfa quadrática, chamada diferencial de Hopf, dada por

$$\phi |dw|^2 = (\sigma \circ h)^2 h_w \bar{h}_w |dw|^2$$

- (d) Mostre que, usando diferenciação complexa e regra da cadeia, tem-se que

$$\phi_{\bar{w}} = (\sigma \circ h)^2 \left[ \bar{h}_w \left( h_{w\bar{w}} + \frac{2\sigma_z}{\sigma} h_w h_{\bar{w}} \right) + h_w \overline{\left( h_{w\bar{w}} + \frac{2\sigma_z}{\sigma} h_w h_{\bar{w}} \right)} \right]$$

Conclua:  $\phi$  is holomorphic, se  $h$  is uma aplicação harmônica.

- (3) Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana de dimensão  $n$  e seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  um função suave. Em  $M \times \mathbb{R}$  vamos definir a métrica  $g_f(x_1, \dots, x_n) := dt^2 + f^2(t)g(x_1, \dots, x_n)$ . Note que tal métrica não é a métrica produto (a menos que  $f \equiv 1$ ). O espaço  $M \times \mathbb{R}$  (ou  $M \times_f \mathbb{R}$ ) é chamado de *warped product*.
- (a) Exiba exemplos não triviais de tais espaços.
- (b) Mostre que as “retas verticais”  $(x_1, \dots, x_n) = \text{cte}$  são geodésicas (“verticais”).
- (c) Dê condições suficientes gerais para que as geodésicas de  $M$  sejam geodésicas “horizontais” de  $M \times \mathbb{R}$ . Seja  $\nabla$  a conexão de  $M$  e  $\tilde{\nabla}$  a conexão de  $M \times \mathbb{R}$ . Mostre que
- (i)  $\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} = 0$ .
  - (ii)  $\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{f'}{f} \frac{\partial}{\partial x_i}$ .
  - (iii)  $\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = -\frac{f'}{f} g_{ij} \frac{\partial}{\partial t} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}$ .
- (4) Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana e  $X \in \mathcal{X}(M)$ . Seja  $p \in M$  e sejam  $U \subset M$  uma vizinhança de  $p$ , e  $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow M$  uma aplicação diferenciável tais que para todo  $p \in U$  a curva  $t \rightarrow \phi(t, q)$  é a trajetória de  $X$  passando por  $q$  em  $t = 0$ .  $X$  é chamado de *campo de Killing* se, para todo  $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , a aplicação  $\phi(t_0, \cdot) : U \subset M \rightarrow M$  é uma isometria. Mostre que
- (a) Um campo linear em  $\mathbf{R}^n$ , definido por uma matriz  $A$  é um campo de Killing se e só se  $A$  é anti-simétrica.
  - (b) Exiba campos de Killing variados nos seguintes espaços:  $\mathbb{H}^n$ ,  $\mathbb{S}^n$  e no espaço de Heisenberg  $\text{Nil}_3$ .
  - (c) Seja  $X$  um campo de Killing em  $M$ ,  $p \in M$ , e  $U$  uma vizinhança normal de  $p$  em  $M$  (i.e  $\exp_p$  é um difeomorfismo em uma vizinhança da origem em  $T_p M$  e  $\exp_p V = U$ ). Admita que  $p$  é o único ponto de  $U$  que satisfaz  $X(p) = 0$ . Então, em  $U$ ,  $X$  é tangente às esferas geodésicas centradas em  $p$  (i.e se  $B_\varepsilon(0)$  é tal que  $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset V$ , onde  $V$  está dada na definição acima da vizinhança normal, chama-se  $\exp_p B_\varepsilon(0)$  de *bola geodésica ou normal* e sua fronteira, pelo lema de Gauss, é uma hipersuperfície em  $M$  ortogonal às geodésicas que partem de  $p$  que é chamada de *esfera geodésica ou normal*).
  - (d)  $X$  é de Killing  $\Leftrightarrow \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle = 0$  para todo  $Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ , onde  $\nabla$  é a conexão Riemanniana de  $M$ .

*Sugestão:* Por continuidade, basta mostrar a equação acima para pontos  $q \in U$  onde  $X(q) \neq 0$ . Sendo assim, supondo  $X(q) \neq 0$ , mostre que existem coordenadas  $x_1, \dots, x_{n-1}, t$  em uma vizinhança  $W \subset U$  de  $p$  tal que  $X = \frac{\partial}{\partial t}$  e  $x_1, \dots, x_{n-1}$  são coordenadas de uma subvariedade  $S$  de codimensão 1 de  $W$  passando por  $q$  ortogonal a  $X(q)$ . Mostre a equação de Killing acima para  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n-1$ .

- (e) Seja  $X$  um campo de Killing em  $M$  com  $X(p) \neq 0, q \in M$ . Então existe um sistema de coordenadas  $x_1, \dots, x_n$  em uma vizinhança de  $q$ , de modo que os coeficientes  $g_{ij}$  da primeira forma fundamental neste sistema de coordenadas não dependem de  $x_n$ .
- (5) Considere o espaço de Lorentz  $\mathcal{L}^{n+2} = \{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\}$  munido da métrica pseudo-Riemanniana  $ds^2 = dx_0^2 + dx_1^2 + \dots - dx_{n+1}^2$ .
- (a) Mostre que existe uma única conexão afim em  $\mathcal{L}$  ( i.e satisfazendo as propriedades de linearidade e produto) que é *compatível* com a métrica pseudo-Riemanniana de  $\mathcal{L}$  e que é *simétrica*. Calcule os *símbolos de Christoffel* desta métrica pseudo-Riemanniana, mostrando que a conexão é a mesma que a Euclideana.
- (b) Seja  $X \in \mathcal{H}^{n+1}$  e seja  $v \in T_X \mathcal{H}^{n+1}$ , onde  $\mathcal{H}^{n+1}$  ó modelo de Minkowski do espaço hiperbólico. Mostre que a geodésica única que passa por  $X$  tangente ao vetor unitário  $v$  é dada por  $\gamma(t) = \cosh tX + \sinh tv$ .
- (c) Considere  $\mathcal{H}^{n+1}$  o modelo de Minkowski do espaço hiperbólico (Veja item 3) acima). Seja  $p$  um inteiro positivo menor que  $n+1$  Considere  $\tilde{f}$  definida em  $\mathcal{L}$  por

$$\tilde{f}(X) = -x_0^2 - \dots - x_{p-1}^2 + x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_{n+1}^2$$

Seja  $f$  a função suave definida em  $\mathcal{H}$  por  $f = \tilde{f}|_{\mathcal{H}^{n+1}}$ .

- (d) Mostre que  $\|\nabla f\|^2 = -4 + 4f^2$ . *Sugestão:* Lembre-se que  $X = (x_0, \dots, x_n, x_{n+1})$  é normal à  $\mathcal{H}^{n+1}$  em  $\mathcal{L}$ . Mostre que
- (e)  $\nabla \tilde{f} = \nabla f - 2fX$ , e que  $\nabla \tilde{f}(X) = 2(-x_0, \dots, -x_p, x_{p+1}, \dots, x_n, -x_{n+1})$ .
- (f) Mostre que

$$\Delta f = (2n+4)f + 2(n+2-2p)$$

*Sugestão:* Mostre que  $\bar{\nabla}_Y \nabla \tilde{f} = 2(-y_0, \dots, -y_{p-1}, y_p, y_{p+1}, \dots, y_n, -y_{n+1})$ . Conclua que  $\bar{\nabla}_X \nabla \tilde{f} = \nabla \tilde{f}$ . Logo, infira que  $\langle \bar{\nabla}_X \nabla \tilde{f}, X \rangle = 2f$ . Deduza também que  $\Delta \tilde{f} = 2(n+2-2p)$ . Em seguida, tome um referencial em  $X \in \mathcal{H}^{n+1}$ ,  $\{e_0, \dots, e_n, X\}$ , tal que  $\{e_0, \dots, e_n\}$  é um referencial ortornormal de  $\mathcal{H}^{n+1}$ , para fazer os cálculos.

- (6) Imito o exercício anterior, exibindo exemplos análogos na esfera  $\mathbb{S}^{n+1}$ .
- (7) Seja  $\bar{M} = \{X \in \mathbb{R}^{n+1}; |X| < 1\}$  a bola unitária munida da métrica (hiperbólica)  $ds^2 = \frac{4|dX|^2}{(1 - |X|^2)^2}$ , mostre que

$$\bar{\Delta} = (1 - r^2)^2 \left( \sum_{i=1}^{n+1} a \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{b}{1 - r^2} r \partial \right),$$

para constantes  $a, b$ ; onde  $r = |X|$ . Calcule  $a$  e  $b$ .

- (8) Mostre o seguinte teorema devido a E. Hopf: Seja  $M$  uma variedade Riemanniana orientável compacta (sem bordo) e conexa. Seja  $f$  uma função suave em  $M$  com  $\Delta f \geq 0$ . Mostre que  $f = \text{const.}$ . *Sugest ao:* Aplique o teorema da divergência duas vezes, primeiramente a  $\Delta f$ , em seguida a  $\Delta f^2$ . Conclua:

- (a) Seja  $X : M \rightarrow \bar{M}$  uma imersão isométrica de uma variedade compacta (sem bordo)  $M$  de dimensão  $n$  em uma variedade  $\bar{M}$  de dimensão  $n + 1$ . Sejam  $f, g$  funções suaves e  $Y$  um campo suave em  $M$ . Mostre que  $\text{div } f \cdot Y = f \cdot \text{div } Y + \langle \nabla f, Y \rangle$ , onde  $\nabla$  é o gradiente sobre  $M$  e  $\text{div}$  é a divergência sobre  $M$ .

Mostre que  $\Delta(f \cdot g) = f \cdot \Delta g + g \cdot \Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$ , onde  $\Delta$  é o Laplaciano sobre  $M$ .

Mostre que

$$\int_M (f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle) dM = 0$$

se  $\bar{M} = \mathbf{R}^{n+1}$  então deduza daí a fórmula de Minkowski

$$\int_M (1 + H(\langle X, N \rangle)) dM = 0$$

onde  $N$  é um campo de vetores normal unitário a  $M$  e  $H$  é a curvatura média calculada com respeito a  $N$ .