LISTA 9 DE GEOMETRIA RIEMANNIANA 2007

RICARDO SA EARP

Vamos tratar e rever a Geometria Diferencial das curvas e superfícies de $\mathbb{R}^3$. Você está aconselhado a fazer as devidas analogias com curvas e superfícies de $\mathbb{H}^3$. Seja S uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$ orientada por um campo de vetores normais unitários N. Seja γ uma curva regular *em* S parametrizada pelo comprimento de arco s. Seja $\gamma''(s)$ o vetor aceleração (ou curvatura) da curva γ em $\mathbb{R}^3$. *A componente tangencial* de $\gamma''(s)$, denotada por

$$\frac{\mathrm{D}\gamma'(s)}{\mathrm{d}s}$$

é chamada de *vetor curvatura da curva* γ *em* S.

Lembremos que uma curva regular γ na superfície orientada S admite um vetor canônico normal unitário η ao longo de γ definido como segue: Seja η o campo normal unitário ao longo de γ de modo que $\{\gamma'(s), \eta(s)\}$ (nesta ordem) determina a orientação de $T_{\gamma(s)}S$, do plano tangente à S em $\gamma(s)$. Ou seja $\nu(s) := N(\gamma(s))$ está dado por

$$\nu(s) = \gamma'(s) \times \eta(s)$$

A *curvatura geodésica*, denotada por k_g, está definida como sendo a componente do vetor curvatura na direção η pela fórmula

$$\frac{\mathrm{D}\gamma'(s)}{\mathrm{d}s} = k_g(s)\eta(s)$$

Note que $\dfrac{\mathrm{D}\gamma'(s)}{\mathrm{d}s} \cdot \gamma'(s) = 0$.

Lembre que a curvatura normal k_N, a curvatura geodésica k_g e a curvatura da curva k de γ satisfazem

$$k^2 = k_n^2 + k_g^2$$

(1) Verifique a fórmula acima num paralelo da esfera $\mathbb{S}^2$.

Suponha que $\gamma(0) = p \in S$ e que $\gamma'(0) = v \in T_pS$.

(2) Mostre que se v é um vetor assimptótico, então ou a curvatura k de γ se anula em $s = 0$ ou $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ é ortogonal à $N(p)$, onde $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ é o unitário na direção de $\gamma''(s)$.

(3) Mostre que se uma curva regular γ não é parametrizada pelo comprimento de arco então

$$k_N(t) = \frac{II(\gamma'(t), \gamma'(t))}{|\gamma'(t)|^2}$$

Vamos agora considerar o referencial de Darboux em vez do mais conhecido referencial de Frenet: Dada γ uma curva em S parametrizada pelo comprimento de arco s considere

$$T(s) = \gamma'(s), \qquad \eta(s), \qquad \nu(s) = T(s) \times \eta(s) = N(\gamma(s))$$

De fato, observe que

$$\nu'(0) = \frac{DN(\gamma(s))}{\mathrm{d}s} \qquad \text{em} \quad s = 0$$

(4) Mostre que existe uma função $\tau_g(s)$, chamada de torção geodésica, tal que

$$\begin{aligned} T'(s) &= \qquad\qquad k_g\eta + k_N\nu \\ \eta'(s) &= -k_gT \qquad\qquad + \tau_g\nu \\ \nu'(s) &= -k_NT - \tau_g\eta \end{aligned}$$

Note que como $\nu'(0)$ depende apenas de $T(0)$, a terceira equação acima mostra que K_N (o que já sabíamos de antemão) e τ_g dependem apenas de T; podemos escrever que $k_N = k_N(v)$ e $\tau_g = \tau_g(v)$, para v unitário tangente.

(a) Deduza das equações acima que se $\{v, w\}$, $v = \gamma'(0)$, é uma base ortornormal, positivamente orientada, de T_pS então

$$\begin{aligned} k_N(v) &= -D_pN(v) \cdot v = II(v, v) \\ \tau_g(v) &= -D_pN(v) \cdot w = II(v, w) \end{aligned}$$

Aproveite o ensejo para re-demonstrar a relação de Euler

(b) Mostre que se $e_1, e_2 \in T_pS$ são direções principais com $\{e_1, e_2\}$ uma base ortornormal positivamente orientada, se θ é o ângulo orientado que o vetor unitário v, à partir de e_1, faz com e_1, então

$$k_N(v) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$$

onde k_1, k_2 são as curvaturas principais de S em p.

(c) Com as notações do item b) logo acima mostre que

$$\tau_g(v) = (k_2 - k_1) \sin\theta \cos\theta$$

Sugestão : Considere a equação obtida acima no item anterior
$\tau_g(v) \ = \ -D_pN(v) \cdot w \ = \ II(v, w)$.

(d) Deduza que γ é uma linha de curvatura, sse $\tau_g = 0$.
Dizemos que γ é uma *geodésica* se

$$\frac{\mathrm{D}\gamma'(s)}{\mathrm{d}s} \equiv 0$$

Segue das propriedades das geodésicas como veremos brevemente, a definição geométrica alternativa: " Geodésicas são curvas que minimizam localmente o comprimento de arco", como já vimos explicitamente no modelo da esfera $\mathbb{S}^2$ ($K = 1$) e no modelo do plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$.

(e) Mostre que γ é uma geodésica, sse $k_g = 0$. (ou ainda, sse, $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ quando definido é ortogonal à S.)

(f) Mostre que os meridianos de uma superfície de revolução são geodésicas. Quais as condições para que um paralelo seja uma geodésica ? Dê condições analíticas e geométricas.

(g) Determine todas as geodésicas no cilindro circular reto, tanto de um ponto de vista analítico quanto de um ponto de vista geométrico. Aproveite o ensejo e determine o tipo conforme do cilindro circular reto e do semi-cilindro circular reto. Encontre ou descreva um cilindro topologicamente equivalente ao cilindro circular reto, mas que não seja conformemente equivalente a este.

(h) Mostre que uma geodésica plana que não seja uma reta é uma linha de curvatura.

(i) Mostre que uma geodésica que é linha de curvatura é uma curva plana.

(j) Mostre que uma reta numa superfície S é uma linha assimptótica; conclua que a curvatura de Gauss satisfaz $K \leqslant 0$ ao longo de qualquer reta contida em S. Mostre que $K = 0$ ao longo da reta, sse o normal N é constante ao longo da reta.

(k) Determine as equações de Clairaut para as geodésicas de uma superfície de revolução e estude o comportamento das geodésicas das seguintes superfícies:
- cone
- parabolóide
- catenóide
- elipsóide
- ondulóide gerado por uma sinóide (ex: $y = \sin z$, o espaço de órbita é o plano yz e o eixo de revolução é o eixo z).

(5) Mostre o teorema de Beltrami-Enneper: Se γ é uma curva assimptótica com $\gamma(0) = p$ e $k(0) \neq 0$, então

$$|\tau(0)| = \sqrt{-K(p)}$$

além disso, mostre que se $k(p) < 0$, e as duas curvas asimptóticas distintas em p têm curvatura diferente de zero em p, então suas torções em p são iguais e de sinais contrários. *Sugestão* : Parametrize γ pelo comprimento de arco. Mostre que $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ é tangente à S em p, e assim $N = \boldsymbol{b} = T \times \overrightarrow{\boldsymbol{n}}$. Mostre que

$$-DN(T(s)) = -\boldsymbol{b}'(s) = -\tau(s) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{n}}$$

Veja que a matriz do operador de Weingarten $-DN : T_pS \to T_pS$ com respeito a base ortornormal $\{T(0), \overrightarrow{\boldsymbol{n}}(0)\}$ deve ter zero na diagonal principal e $-\tau(0)$ na outra diagonal. Conclua que $K(p) = -\tau(0)^2$. Para completar a demonstração (e re-obter a fórmula pedida) use a relação de Euler obtida no item 2) b) e a fórmula obtida no item 2) c) .

(6) Demonstre o seguinte *teorema de Terquem-Joachimsthal*: Se γ é uma curva na interseção de duas superfícies S_1, S_2 que é uma linha de curvatura de S_1; então γ é uma linha de curvatura de S_2, sse S_1 e S_2 se interceptam num ângulo constante ao longo de γ.
   (a) Aplique o teorema para demonstrar que os meridianos são linhas de curvatura de uma superfície de revolução .
   (b) Aplique o teorema para mostrar que γ é uma linha de curvatura plana de S, sse a imagem esférica pela aplicação normal de Gauss $N \circ \gamma$ descreve uma circunferência.

Agora vamos tratar de propriedades geométricas de certas superfícies de $\mathbb{R}^3$.

(7) Considere as superfícies abaixo:
   (a) Estude o comportamento da curvatura de Gauss K quando $x^2 + y^2 \to \infty$, onde S está dada por
   $z = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + 2}$
   (b) (*sela de macaco*) Calcule os coeficientes da segunda forma fundamental e mostre que a curvatura média e de Gauss se anulam na origem:
   $z = x^3 - 3xy^2$
   (c) (*pseudo-esfera*) Considere S, a superfície (*pseudo-esfera*) obtida pela revolução da parte da *tractrix* contida no primeiro quadrante aberto, em torno do eixo-y. Mostre que a curvatura de Gauss K de S é identicamente igual a -1.

(8) Investigue e classifique as superfícies de revolução de curvatura de Gauss $K \equiv +1$, fazendo uma análise geométrica de suas curvas geratrizes.

(9) Considere a (*superfície mínima de Enneper*)

$$X(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right) \; u, v \in \mathbb{R}.$$

(a) Mostre que os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por $E = G = (1 + u^2 + v^2)^2,\ F = 0$, e mostre que Enneper é completa.

(b) Mostre que a superfície mínima de Enneper é globalmente conforme a $\mathbb{C}$, logo simplesmente conexa.

(c) Calcule os coeficientes da segunda forma fundamental de Enneper.

(d) Mostre que a superfície mínima de Enneper é de fato mínima, isto é de curvatura média $H = 0$.

(e) Você saberia mostrar que as linhas de curvatura de Enneper são curvas planas ?

(10) Mostre que o helicóide (veja item 10) logo abaixo) é globalment conforme a $\mathbb{C}$.

(a) Mostre que as linhas coordenadas do helicóide são linhas assimptóticas. Mostre que as linhas assimptóticas do helicóide são retas e hélices circulares. Será que as linhas coordenadas são geodésicas ? Estude o comportamento do normal unitário N ao helicóide ao longo das retas.

(b) Mostre que o helicóide é uma superfície mínima.

(c) Calcule a curvatura de Gauss do helicóide.

(d) Mostre que as linhas de curvatura do helicóide são hélices logarítmicas.

(11) Considere a *família catenóide-helicóide*, denotada $\mathcal{F}_\theta$. abaixo (Você não precisa fazer os itens feitos por você num lista anterior).

$$\mathcal{Z}_\theta = \cos\theta \cdot \mathcal{C}(u,v) + \sin\theta \cdot \mathcal{H}(u,v) \qquad\qquad \theta \in [0, 2\pi)$$

onde $\mathcal{C}(u,v) = (a\cosh v \cos u, a\cosh v \sin u, av)$ e $\mathcal{H}(u,v) = (-a\sinh v \sin u, a\sinh v \cos u, -au),\ 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty$, são parametrizações (locais) do catenóide e do helicóide, respectivamente (Explique isto !).

(a) Mostre que $\mathcal{F}_\theta$ é uma família a 1-parâmetro de superfícies helicoidais cujo passo depende de θ (Claro que para $\theta = 0$ obtemos o catenóide), ligando uma parte do catenóide à uma parte do helicóide.

(b) Mostre $\mathcal{F}_\theta$ é uma família a 1-parâmetro de superfícies *mínimas* isométricas, ligando uma parte do catenóide à uma parte do helicóide. Dizemos que $\mathcal{Z}_\theta,\ \theta \in (0, 2\pi)$ é uma *superfície associada* ao catenóide (helicóide).
(c) Conclua que o catenóide e o helicóide são localmente isométricos e, por uma isometria local, geodésicas no catenóide são levadas em geodésicas no helicóide (Veja figuras no livro do prof. Manfredo, ou desenhe-as usando o Maple ou o Mathematica).
(d) Mostre que as linhas assimptóticas do catenóide são hélices logarítmicas.

Vamos continuar o nosso estudo sobre superfícies de $\mathbb{R}^3$. Vamos explorar certas superfícies especiais, tais como superfícies mínimas, superfícies de curvatura média constante. Vamos explorar e aplicar conceitos importantes tais como equações das geodésicas, fluxo, fórmula do fluxo, princípio do máximo, dentre outros. Vamos aplicar as equações de compatibilidade; equação de curvatura de Gauss e equação de Codazzi-Mainardi.
Você deve fazer um paralelo comparativo com as superfícies de $\mathbb{H}^3$ para entender os conceitos, as fórmulas, os resultados que continuam válidos quando o ambiente é o espaço hiperbólico.

Primeiramente vamos fazer uma incursão pelas superfícies de $\mathbb{R}^3$, tomando *parâmetros isotérmicos*, obtendo com esta ajuda alguns conceitos, fórmulas e resultados fundamentais da geometria das imersões . Considere S uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$. Considere $z = u + iv$ coordenadas isotérmicas locais em uma vizinhança de um ponto $p \in S$; isto é, $E = G$ e $F = 0$, onde E, F, G, são os coeficientes da primeira forma fundamental, relativos a uma parametrização conforme $X(z)$. Vamos denotar também $E = \lambda^2$. Sejam l, m, n, os coeficientes da segunda forma fundamental (Na notação proposta em sala de aula $e = l, f = m, g = n$). Vamos denotar $\{X_1, X_2\}$ o referencial local adaptado à X em p. Usaremos também a notação X_u para designar X_1 e X_v para designar X_2.

(12) O gradiente, a divergência e o Laplaciano. Seja $f : S \to \mathbb{R}$ uma função real suave definida em S. Define-se o *gradiente* de f, denotado por ∇f como sendo o campo de vetores tangentes à S satisfazendo

$$\nabla f \cdot v = df_p(v)$$

onde v é tangente à S em p, isto é $v \in T_pS$.

(13) Mostre que
$$\nabla f = \frac{f_u}{E} X_u + \frac{f_v}{E} X_v$$
onde cometemos o abuso de notação usual identificando $f(u,v)$ com $f \circ X(u,v)$.

(14) Define-se a *divergência* de um campo Y de vetores tangentes à S (i. e $Y(p) \in T_pS$), denotada por div, como sendo o traço da aplicação $Z \to D_Z Y$, onde Z é um campo de vetores tangentes à S, e D é a conexão Riemanniana de S. Ou seja,
$$\operatorname{div} Y = \operatorname{tr}(Z \to D_Z Y)$$

(15) Mostre
$$\operatorname{div} Y = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial}{\partial u}(Y \cdot X_u) + \frac{\partial}{\partial v}(Y \cdot X_v)\right)$$

(16) Define-se o *Laplaciano* de uma função real suave f definida em S , denotado por $\triangle f$, como sendo
$$\triangle f = \operatorname{div} \nabla f$$

(17) Mostre
$$\triangle f(p) = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial v^2}\right)$$
onde cometemos o abuso de notação identificando $f(u,v)$ com $f \circ X(u,v)$.

(18) Mostre que os conceitos de gradiente, divergência e Laplaciano pertence à *geometria intrínseca das superfícies*, ou seja dependem apenas da primeira forma fundamental e podem por isto ser definidos numa superfície Riemanniana qualquer. Assim o Laplaciano definido acima é também chamado de *Laplaciano Riemanniano*.

(19) Consideremos S munida de sua estrutura de superfície de Riemann (induzida pela métrica de S). Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função real suave. o *Laplaciano conforme relativo à coordenada conforme* z está definido como
$$\triangle_z f = f_{uu} + f_{vv}$$

(20) Mostre que a definição de Laplaciano conforme depende da coordenada isotérmica z, uma função mas a noção de f ser harmônica na superfície de Riemann não depende. Além disso mostre que esta noção de harmonicidade é a mesma considerando o Laplaciano Riemanniano definido no item anterior.

Um importante teorema da Geometria é o *teorema da divergência*: Seja S uma superfície Riemanniana suave e seja Y um campo suave de vetores tangentes à S. O teorema da divergência (intrínseco) diz o seguinte

$$\int\limits_S \operatorname{div} Y \,\mathrm{d}A = -\int\limits_{\partial S} Y \cdot \eta \,\mathrm{d}s$$

onde $\mathrm{d}A = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ é o elemento de área de S, ∂S é o bordo de S, $\mathrm{d}s$ é o elemento comprimento de arco de ∂S, e η é o vetor co-normal *interior* ao longo de ∂S (η é tangente à S, normal à ∂S, apontando para dentro de S).

(21) Considere X como sendo o vetor posição de uma superfície orientada S em $\mathbb{R}^3$, por um campo de vetores normais unitários N ao longo de S. Suponha que ∂S seja uma curva (regular) simples fechada γ contida no plano-xy, de modo que $\gamma = \partial D$ onde $D \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio de Jordan. Suponha que $S \cup D$ é um ciclo orientável, de modo que $S \cup D = \partial V$, onde V é um "sólido " de $\mathbb{R}^3$, e o teorema da divergência se aplica (Faça uma figura !). Seja $\triangle_{\mathbb{R}^3}$ o Laplaciano usual de $\mathbb{R}^3$. Mostre que

$$6\mathrm{vol}(V) + 2\int\limits_S X \cdot N \,\mathrm{d}A = 0$$

Sugestão : Aplique corretamente o teorema da divergência (em $\mathbb{R}^3$) Mostre que

$$\triangle |X|^2 = 4 + 4H X \cdot N$$

(22) Aplique agora o teorema da divergência *em* S mostrando que

$$\int\limits_S \triangle |X|^2 \,\mathrm{d}A = -2\int_{\partial S} X \cdot \eta \,\mathrm{d}s$$

onde η é o co-normal interior ao longo do bordo de S.

(23) Levando em conta os resultados obtidos nos itens anteriores deduza que

$$4\,\text{área}(S) + 4H\int\limits_S X \cdot N \,\mathrm{d}A = -2\int_{\partial S} X \cdot \eta \,\mathrm{d}s$$

(24) Juntando os resultados obtidos nos itens anteriores infira

$$2\,\text{área}(S) = 6H\mathrm{vol}(M) - \int_{\partial S} X \cdot \eta \,\mathrm{d}s$$

(25) (*Fluxo numa superfície mínima*). Suponha agora que S seja uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$, orientada por um campo de vetores normal unitário N ao longo de S. Seja ν o co-normal *exterior* ao longo de ∂S.

Seja W um campo de vetores suaves em $\mathbb{R}^3$. Considere a componente tangencial W^T de W, ou seja a projeção ortogonal de W no plano tangente à S. Mostre que

$$W^T = W - (W \cdot N)\, N$$

(26) Seja v um campo *constante* em $\mathbb{R}^3$. Mostre que v^T é o gradiente de uma função harmônica que é a restrição à S de uma função linear em $\mathbb{R}^3$. *Sugestão* : Você vai precisar do fato que as coordenadas dos pontos de uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$ em parâmetros isotérmicos são funções harmônicas: Veja logo adiante. Mostre ainda que segue do teorema da divergência a seguinte equação vetorial

$$\int_{\partial S} \nu \, \mathrm{d}s = 0$$

Conclua que para curvas fechadas γ, tem-se que $\int_\gamma \nu \, \mathrm{d}s$, é um invariante de homologia.

O fluxo ao longo de γ está definido pela quantidade

$$\mathrm{Fluxo}([\gamma]) := \int_\gamma \nu \, \mathrm{d}s$$

- Considere uma superfície de revolução com eixo z e curva geradora C contida no plano yz, parametrizada por $(r(t), t), t \in I \subset \mathbb{R}$. Considere a porção da superfície entre os planos horizontais $z = t_1, z = t_2$, cujo bordo consiste de dois círculos horizontais de raios $r(t_1)$ e $r(t_2)$, respectivamente. Seja $\nu = (0, 0, 1)$ o vetor vertical canônico. Calcule o *fluxo vertical* e obtenha a seguinte equação diferencial $r(t)\dfrac{1}{\sqrt{1 + r'^2}} = \mathrm{cte}$. Conclua que a superfície é um catenóide.

Nota: Lembremos que a curvatura de Gauss K de uma superfície mínima S é sempre não positiva. A curvatura total denotada por $C(S)$ está definida por

$$C(S) := \int_S K \, \mathrm{d}A$$

Um resultado interessante é o seguinte: Se uma superfície mínima completa mergulhada de curvatura total finita em $\mathbb{R}^3$, tem *fluxo* *vertical* (i. e o fluxo, Fluxo($[\gamma]$), é um vetor vertical para toda curva fechada $\gamma \subset S$), então S é o plano o catenóide. Nota: A curvatura total pode ser interpretada como a imagem esférica da aplicação normal de Gauss. De modo que quando a curvatura total é finita vale a seguinte fórmula:

$$C(S) = -4\pi n$$

onde n é o grau da aplicação normal de Gauss. Quando a curvatura total é finita segue de um teorema de Huber que S é conformemente equivalente a uma superfície de Riemann compacta $\overline{S}$ de gênero g, removido um conjunto finito de pontos, chamados *puncture*. Os dados meromorfos $(g, f\,\mathrm{d}z)$ se estendem meromorficamente à $\overline{S}$ (*Teorema de Osserman*).

(27) Mostre que *em parâmetros isotérmicas* $z = u+iv$, tem-se que: A curvatura média H e a curvatura de Gauss K de uma superfície S imersa em $\mathbb{R}^3$ são dados por

$$H = \frac{l+n}{2E} \qquad \text{e} \quad \mathrm{K} = \frac{\mathrm{ln} - \mathrm{m}^2}{\mathrm{E}^2}$$

Idem para uma superfície S imersa em $\mathbb{H}^3$.

(28) Deduza que equação das linhas de curvatura *via o método dos multiplicadores de Lagrange*, e infira que em coordenadas isotérmicas a equação das linhas de curvatura é dada por

$$-m\,\mathrm{d}u^2 + (l-n)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + m\,\mathrm{d}v^2 = 0$$

(29) Mostre as equações de Codazzi-Mainardi:

$$l_v - m_u = \frac{E_v}{2E}(l+n)$$
$$m_v - n_u = -\frac{E_u}{2E}(l+n)$$

Conclua

(30) As equações de Codazzi-Mainardi podem ser escritas como

$$\left(\frac{l-n}{2}\right)_u + m_v = EH_u$$
$$\left(\frac{l-n}{2}\right)_v - m_u = -EH_v$$

Sugestão : Parta dos termos a esquerda das equações propostas substituindo os termos pelas definições , em seguide use o fato de que N é normal unitário, X_u e X_v tangentes ortogonais e de mesmo módulo, aplicando simetria e compatibilidade com a métrica, para chegar ao resultado desejado.

Deduza

(31) Se $\phi = \dfrac{l-n}{2} - im$, as equações de Codazzi tomam a *forma complexa*

$$\phi_{\overline{z}} = EH_z$$

A equação (ou as equações) de Codazzi-Mainardi são *as mesmas* no espaço hiperbólico. Verifique isto ! onde $2\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial u} - i\dfrac{\partial}{\partial v}$, e $2\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial}{\partial u} + i\dfrac{\partial}{\partial v}$. Infira que S tem curvatura média contante, sse ϕ é holomorfa. Mostre que isto implica que os pontos umbílicos de uma superfície conexa S imersa em $\mathbb{R}^3$ de curvatura média contante são isolados ou S é totalmente umbílica. Mostre o mesmo para uma superfície de curvatura média constante imersa em $\mathbb{H}^3$.

(32) Mostre ainda que as linhas de curvatura são dadas pela equação

$$\Im\left(\phi \cdot (\mathrm{d}\, z)^2\right) = 0$$

Nota: Um fato que pode ser demonstrado é que quando S (conexa) tem curvatura média constante, o índice do campo de linhas de curvatura num ponto singular (i. e num ponto umbílico, necessariamente isolado, se S não é totalmente umbílica) é estritamente negativo. Segue disto, e do teorema de Poincaré-Hopf, o seguinte teorema de Hopf demonstrado nos meados do século vinte. Tal resultado deu um novo impulso à teoria das superfícies de curvatura média constante: *Se uma superfície fechada imersa S em $\mathbb{R}^3$ (não necessariamente mergulhada), topologicamente equivalente a esfera , tem curvatura média constante então S é uma esfera geométrica.* Enuncie e demonstre o correspondente teorema de Hopf no espaço hiperbólico.

(33) Mostre que quando S tem curvatura média constante a diferencial holomorfa quadrática

$$\phi \cdot (\mathrm{d}\, z)^2$$

está globalmente bem definida em S, i. e não depende das escolhas dos parâmetros isotérmicos.

(34) Mostre a seguinte fórmula

$$\triangle X = 2\,\overrightarrow{H}$$

onde $\overrightarrow{H}$ ó vetor curvatura média de S (Note que você pode interpretar X como sendo o vetor posição de S).

Conclua a seguinte caracterização das superfícies mínimas:

$$S \quad \text{é mínima} \qquad \Longleftrightarrow \triangle X = 0$$

Ou seja S é mínima, sse as coordenadas de S em $\mathbb{R}^3$ em parâmetros isotérmicos são funções harmônicas.

(35) A idéia agora é enfocar o seguinte: Sejam k_1, τ_1, k_2, τ_2 as curvaturas e torções de duas linhas de curvatura passando por um ponto não umbílico de uma imersão mínima conforme $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$, ($U$ aberto de $\mathbb{R}^2$). Então demonstre o *teorema de Enneper* deduzindo a seguinte fórmula

$$k_1^2 \tau_1 = k_2^2 \tau_2$$

Sugestão : Considere os parâmetros isotérmicos $z = u + iv$, i. e $X = X(z)$. Admita o fato que estes parâmetros podem ser escolhidos (nas vizinhanças de um ponto não umbílico) de forma que as linhas coordenadas sejam linhas de curvatura. Mostre que isto implica que $m = 0$ e que as equações de Codazzi-Mainardi ficam $(F = m = 0)$

$$l_v = \frac{E_v}{2}\left(\frac{l}{E} + \frac{n}{G}\right)$$
$$n_u = \frac{G_u}{2}\left(\frac{l}{E} + \frac{n}{G}\right)$$

Donde conclua que $l = -n = b,\ b \in \mathbb{R}$ (constante). Em seguida use as fórmulas da curvatura e da torção

$$\tau_1 k_1^2 = -\frac{X_u \times X_{uu} \cdot X_{uuu}}{|X_u \times X_{uu}|^2} \cdot \frac{|X_u \times X_{uu}|^2}{|X_u|^6}$$

Para concluir que $X_u \times X_{uu} \cdot X_{uuu} = \dfrac{l}{4}\left(2E_{uv} - \dfrac{E_u E_v}{E}\right)$. Daí segue o resultado desejado.

(36) Deduza do teorema de Enneper acima a seguinte proposição : Se uma família de linhas de curvatura de uma superfície mínima é constituída por curvas planas, assim também o é a família de linhas de curvatura ortogonal, numa vizinhança de um ponto não umbílico.

Nota: As superfícies mínimas (não planas) cujas linhas de curvatura são curvas planas foram classificadas : Estas são o catenóide, a superfície mínima de Enneper e as superfícies de Bonnet.

Vamos em seguida abordar a famosa *representação de Weierstrass* das superfícies mínimas.

(37) Seja S uma superfície mínima simplesmente conexa em $\mathbb{R}^3$ e $z = u + iv$ parâmetros isotérmicos. Vamos obter "meromorphic data" $(g, f\,\mathrm{d}z)$ que determinam a imersão mínima $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2$. Seja

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) := X_u - iX_v$$

(a) Mostre que $z = u + iv$ são parâmetros isotérmicos, sse $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = 0$.

(b) Mostre que X é harmônica, sse Φ é holomorfa.

(c) Mostre que X é regular e $z = u + iv$ são parâmetros isotérmicos (ou seja $E \neq 0$), sse $\sum |\Phi_j|^2 \neq 0$ e $z = u + iv$ são parâmetros isotérmicos.

(d) Mostre que

$$X(z) = \Re \int_{z_0}^{z} \Phi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

(e) Mostre que se X não é *plana* então $\Phi_1 \not\equiv i\Phi_2$, e $\Phi_3 \not\equiv 0$. Neste caso, existe uma função holomorfa $2f := \Phi_1 - i\Phi_2$ em U e uma função meromorfa $g := \dfrac{\Phi_3}{\Phi_1 - i\Phi_2}$, de maneira que podemos escrever (fazendo um abuso de notação) a *representação de Weierstrass*

$$X(z) = \Re \int_{z_0}^{z} \big((1-g^2)f\,\mathrm{d}z, i(1+g^2)f\,\mathrm{d}z, 2gf\,\mathrm{d}z\big)$$

Mostre que a superfície será regular sse f se anula *apenas* nos pólos de g e a ordem de cada zero nestes pontos é exatamente o dobro da ordem do pólo de g.

(f) Mostre que a métrica é dada por

$$\mathrm{d}s^2 = \big(|f|(1+|g|^2)\big)^2\,|\,\mathrm{d}z|^2$$

(g) Mostre que a segunda forma fundamental II é dada por

$$II = -2\Re(f\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}g)$$

(h) A finalidade deste exercício é mostrar que g é exatamente a composta da aplicação normal de Gauss com a projeção estereográfica do *pólo norte*, que tem que ser conforme, sse S é mínima (por quê ?).

(i) Mostre que

$$X_u \times X_v = \big(\Im(\overline{\Phi_3}\Phi_2), \Im(\overline{\Phi_1}\Phi_3), \Im(\overline{\Phi_2}\Phi_1)\big)$$

Conclua

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \left(\frac{2\Re g}{1+|g|^2}, \frac{2\Im g}{1+|g|^2}, \frac{1-|g|^2}{1+|g|^2}\right)$$

Infira daí o desejado.

(j) Mostre que a curvatura de Gauss K de uma superfície mínima pode ser expressa em termos de f, g

$$K = -\left(\frac{2|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2}\right)^2$$

(k) Vamos neste item re-obter superfícies mínimas clássicas via a representação de Weierstrass

(l) Mostre que o catenóide pode ser obtido fazendo $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$,
$g(z) = z, f(z)\,\mathrm{d}z = \dfrac{\mathrm{d}z}{z^2}$.

(m) Mostre que o helicóide pode ser obtido fazendo $U = \mathbb{C}, g(z) = \mathrm{e}^z$,
$f(z)\,\mathrm{d}z = i\,\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z$.

(n) Mostre que Enneper pode ser obtida fazendo $U = \mathbb{C}, g(z) = z$,
$f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}z$. Nota: O catenóide é a única superfície mínima de revolução . O catenóide e a superfície de Enneper são as únicas superfícies mínimas completas de curvatura total -4π. Se uma superfície mínima S mergulhada e completa tem curvatura total finita e gênero zero, então S tem que ser o plano ou o catenóide (*Teorema de Lopez-Ros*). Se uma superfície mínima S mergulhada e completa tem curvatura total finita e dois fins, então S tem que ser o catenóide (*Teorema de R. Schoen*): A hipótese de curvatura total finita pode ser relaxada e substituída pela hipótese bem mais fraca de *topologia finita* (*Teorema de P. Collin*).

(o) Obtenha a representação de Weierstrass da família catenóide-helicóide de superfícies mínimas associadas, localmente isométricas, ao catenóide (helicóide).

(p) Vamos ver outros exemplos de superfícies mínimas

(q) A superfície de Scherk é dada implicitamente por

$$\mathrm{e}^z = \frac{\cos y}{\cos x}$$

Estude o seu gráfico.
Scherk foi obtida pelo método de separação das variáveis. A equação não paramétrica da superfície mínima de $\mathbb{R}^3$ é a seguinte:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{W(u)}\right) = 0$$

Obtenha Scherk procurando soluções da equação não paramétrica da superfície mínima de $\mathbb{R}^3$ da forma $z = u(x,y) := F(x) + G(y)$.

(r) Considere $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $g(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $f(z)\,\mathrm{d}z = \dfrac{\mathrm{d}z}{z^2\, e^{\frac{1}{z}}}$. Calcule Φ_1, Φ_2, Φ_3. Mostre que a condição de zeros e pólos de f, g estão satisfeitas. Para que a imersão esteja bem definida é necessário verificar as *condições de período*: Basta considerar uma curva de Jordan em torno de 0 e calcular os resíduos de Φ_1, Φ_2, Φ_3 na singularidade 0, e mostrar que parte real do resíduo é real. Conclua que $(g, f\,\mathrm{d}z)$ define uma imersão conforme mínima de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ em $\mathbb{R}^3$. Mostre que a imersão é completa e de curvatura total $-\infty$. *Sugestão* : Para mostrar o último ponto você terá que usar o grande teorema de Picard.