

LISTA 1 DE GEOMETRIA DIFERENCIAL 2007

PROFESSOR RICARDO SA EARP

Nesta lista é muito conveniente o uso do MAPLE para facilitar os cálculos, assim como para fazer os desenhos das curvas.

- (1) Esboce os gráficos das curvas abaixo, indicando domínio de definição, diferenciabilidade (e pontos singulares, onde falta diferenciabilidade), intervalos de crescimento (decréscimo), concavidade (e pontos de inflexão, onde muda a concavidade), comportamento no infinito, retas assíntotas (distância ao gráfico tende a zero no infinito, distinguindo as assíntotas horizontais, verticais ou oblíquas).
 - (a) $f(x) = x + \sin x$
 - (b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.
 - (c) $f(x) = \frac{x}{(x - 1)^2}$.
 - (d) $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
- (2) Considere as curvas parametrizadas $\alpha(t) = (f(t), g(t))$, abaixo. Determine o domínio de definição. Verifique a regularidade da curva. Encontre os pontos de interseção da curva com os eixos coordenados e verifique se apresenta simetria em relação a estes eixos ou simetria em relação à origem. Verifique também se são invariante por rotações ou por um grupo de rotações. Nos valores do parâmetro correspondentes aos pontos de interseção com os eixos, ache $\alpha'(t)$ e as equações das retas tangentes e normais nestes pontos. Ache as expressões das retas verticais e horizontais que tangenciam estas curvas. Encontre os pontos múltiplos (pontos de auto-interseção). Analise o sinal da derivada de cada coordenada da curva e estude sua variação. Estude a concavidade da curva determinando os pontos de inflexão.
 - (a) $\alpha(t) = (\sqrt{3}t^2, \sqrt{3}t - \frac{t^3}{3})$, $t \in \mathbb{R}$. Neste exemplo, exiba fórmulas explícitas mostrando que a curva é união de gráficos verticais ou horizontais.

- (b) $\alpha(t) = ((t^3 - t)e^{-t^2}, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. Neste exemplo, exiba fórmulas explícitas mostrando que a curva é união de gráficos verticais ou horizontais.
- (c) (Curva de Lissajous) $x = f(t) := \sin 2t$, $y = g(t) := \cos 3t$. Neste exercício dê especial atenção aos pontos múltiplos e verifique como a periodicidade das funções coordenadas está refletida na simetria da curva. Determine se a curva dada é fechada (Uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita fechada se $\alpha(a) = \alpha(b)$). Generalize a definição da curva de Lissajous.
- (d) $f(t) = \frac{t(t+1)}{(t-2)}$ e $g(t) = \frac{t+1}{t(t-1)}$. Mostre que $f(t)$ determina na verdade quatro curvas parametrizadas, ou seja, o gráfico do traço de $f(t)$ possui quatro componentes conexas. Neste exemplo é sugerido o seguinte: Calcule os limites laterais de f e g em $\pm\infty$, $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$. Encontre também a reta tangente correspondente à $t = -1$.
- (e) $f(t) = 2 \cos t + \cos 2t$, $g(t) = 2 \sin t - \sin 2t$. A curva é regular? A curva é simples e fechada? (ou seja fechada, sem auto-interseções, perfazendo uma única volta?).
- (3) Estude a curva dada implicitamente pelas equações e esboce o seu gráfico.
- (a) (*Folium Parabólico*): $x^3 = a(x^2 - y^2) + bxy = 0$, $a > 0$, $b > 0$, $b = \frac{2a}{3}$.
- (b) (*Trevo equilátero*): $x(x^2 - 3y^2) = 3a(x^2 + y^2)$, $a > 0$. Neste item encontre a forma polar da curva.
- (c) (*Tridente de Newton*): $axy = x^3 + 2ax^2 + 3a^2x + 4a^3$, $a > 0$.
- (d) (*Lemniscata de Bernoulli*): $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $a > 0$, $a = \sqrt{2}$. Neste item encontre a forma polar da curva.
- (e) (*Folium de Descartes*): $x^3 + y^3 = 3xy$. Tente $y = tx$, para encontrar uma parametrização local da curva. Determine uma reta assíntota, se existir.
- (4) Investigue nos livros textos de Geometria as seguintes curvas clássicas, estudando completamente os seus comportamentos geométricos.
- (a) Cissóide de Diocles.
- (b) Tractrix.
- (c) Astróide.
- (d) Limaçon de Pascal.

- (5) Exiba uma parametrização da curva C obtida pela interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, e do cilindro $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, chamada de *curva de Viviani*. Generalize.
- (6) Exiba um exemplo não trivial de uma curva numa esfera esboçando o desenho.
- (7) Considere a curva dada por

$$x = t - 2 \tanh t, \quad y = \frac{2}{\cosh t}$$

chamada de *courbe des forçats* e considerada por Poleni em 1729. Será esta regular? Será esta parametrizada pelo comprimento de arco? Terá esta uma reta assíntota? Estude a concavidade da curva e o comportamento no infinito. Desenhe a curva, indicando no desenho o sentido do movimento.

Um fato surpreendente é que a superfície (Figura 2) *associada (isométrica) no espaço hiperbólico tridimensional \mathbb{H}^3 a certo catenóide (mínimo) de \mathbb{R}^3 é uma superfície invariante por translações Euclidianas horizontais, cuja curva geradora é conhecida como courbe des forçats descoberta por Poleni (Figura 1).*

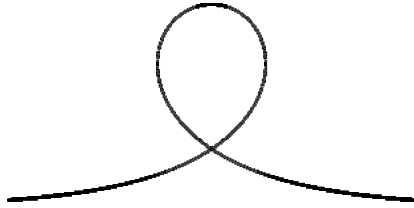


Figure 1

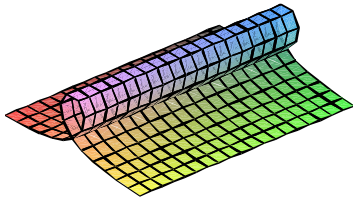


Figure 2