

LISTA 3 DE DIFERENCIAL 2007

PROFESSOR RICARDO SA EARP

- (1) Considere a equação $y^3 = e^{x+y}$.
 - (a) Mostre que em torno do ponto $(-1, 1)$ a equação define uma curva mergulhada dada como um gráfico de uma função $y = f(x)$, calculando $f'(-1)$.
 - (b) Estude os pontos em que a equação está dada por um gráfico horizontal $x = g(y)$, determinando explicitamente g , se tal é possível, estudando, neste caso, o seu comportamento (análise da primeira e segunda derivada).
 - (c) O que acontece se modificamos a equação na forma $y^n = \alpha(x) e^y$, em torno do ponto $(0, 0)$ com $\alpha(0) = 0$ e $\alpha'(0) \neq 0$?
 - (d) Use o MAPLE para traçar o gráfico da curva.
- (2) Mostre que a equação $x^2 - xz + z^2 + yz = 4$ define implicitamente uma superfície mergulhada S , que, localmente, numa vizinhança de $(1, 3)$, está dada por dois gráficos verticais da forma $z(x, y)$ calculando implicitamente as derivadas parciais $p := z_x$ e $q := z_y$, e calculando também os normais neste ponto. Calcule explicitamente as funções $z(x, y)$, caso seja possível. Responda se 4 é um valor regular ou não de $f(x, y, z) = x^2 - xz + z^2 + yz$, respondendo justificando se $S := f^{-1}(4)$ é uma superfície regular ou não. Use o MAPLE para traçar S , explicitando graficamente uma vizinhança de $(1, 3)$.
- (3) Considere o sistema

$$\begin{aligned}u \sin v + x^2 &= 0 \\u \cos v - y^2 &= 0\end{aligned}$$

- (a) Determine condições para que o u e v satisfazendo o sistema possam ser escritas como funções de x e de y ; neste caso encontre as derivadas parciais de u com respeito a x e y fazendo derivação implícita. Verifique o resultado explicitando u no sistema dado.
- (4) Encontre uma E.D.P. de primeira ordem que cuja superfícies integrais estão dadas por $u(x, y, z) = xy + z^2 = c$, onde c é uma constante.

- (5) Assuma que $F(x, y, z) = 0$ define localmente implicitamente uma superfície que pode ser vista tanto como um gráfico vertical $z = f_1(x, y)$, ou como um gráfico horizontal das duas formas $x = f_2(y, z)$ ou $y = f_3(x, z)$. Mostre que $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = -1$, interpretando.
- (6) Verique se as funções $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ abaixo são suaves e determine os abertos Ω do espaço de maneira que 0 seja um valor regular, de maneira que $f^{-1}(0)$ seja uma superfície regular, estudando tal superfície. Quando 0 não é um valor regular estude assim mesmo o conjunto $\{f(x, y, z) = 0, x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Use o MAPLE para esboçar várias superfícies atribuindo valores para as constantes.
- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - c = 0; c \in \mathbb{R}$.
 - $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 - cz^2 = 0; a, b, c > 0$.
 - $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 - cz^2 + 1 = 0; a, b, c > 0$.
 - $((x^2 + y^2)^{1/2} - a)^2 + z^2 - r^2 = 0; a > r > 0$.
- (7) Verifique se os conjuntos abaixo são subvariedades ou não, fazendo primeiramente $n = 2, 3$ determinando sua dimensão e estudando-os geometricamente: interseções com os hiperplanos coordenados verificando simetrias-grupos do espaço ambiente que deixam o conjunto invariante-, conexidade, completude (se são completas).
- $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 - 1 = 0 (n \geq 2)$.
 - $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 + 1 = 0 (n \geq 2)$.
 - Generalize definindo outras quádricas de dimensão arbitrária.
- (8) Estude $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = c, c \in \mathbb{R}$, considerando os casos $c \neq 0$ e $c = 0$, separadamente, determinando explicitamente o conjunto quando $c = 0$, e determinando os valores de c para os quais a equação define implicitamente uma superfície regular.
- (9) Considere uma superfície de revolução em torno do eixo z da forma $z = F(r), r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Mostre que as derivadas parciais de $z = z(x, y)$ satisfazem uma EDP linear (homogênea) de primeira ordem da forma $yp - xq = 0$, onde $p = z_x$ e $q = z_y$.
- (10) Considere uma superfície que é localmente o gráfico de uma função $z(x, y)$ dada implicitamente por uma equação da forma $F(u, v) = 0$, onde $u = u(x, y, z)$ e $v = v(x, y, z)$ são funções dadas de x, y, z de classe C^1 , e F é uma função dada de u e de v de classe C^1 . Mostre que $p = z_x$ e $q = z_y$ satisfazem uma

E.D.P. de primeira ordem $p \frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)} + q \frac{\partial(u, v)}{\partial(z, x)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$, onde

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = u_x v_y - u_y v_x, \text{ etc..}$$

- (11) Seja $v = v(x, y)$ e $u = u(x, y)$, para $(x, y) \in \Omega$, sendo Ω um aberto de \mathbb{R}^2 . Admita que u, v sejam de classe C^1 . Assuma que $u = H(v)$, onde H é de classe C^1 .

(a) Encontre $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ e H explícitas; por exemplo, u e v satisfazendo $u^2 + v^2 = 1$ ou $v = u^2 - 3u + 2$.

(b) Mostre que $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = u_x v_y - u_y v_x \equiv 0$. Verifique esta relação nos exemplos obtidos em (a).

(c) Mostre a recíproca do resultado acima: Se $\frac{\partial v}{\partial y} \neq 0$, e

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = u_x v_y - u_y v_x \equiv 0, \text{ então existe uma relação funcional } F(u, v) = 0 \text{ entre } u \text{ e } v \text{ não envolvendo } x \text{ e } y.$$

- (12) Considere a E.D.P. quasilinear de primeira ordem (chamada também de equação de Lagrange) dada por

$$P(x, y, z)p + Q(x, y, z)q = R(x, y, z) \quad (1)$$

onde P, Q, R são funções de classe C^1 que não se anulam simultaneamente.

(a) Mostre que se $z(x, y), p = z_x, q = z_y$ é uma solução de (1) dada implicitamente pela equação $u(x, y, z) = c_1$ então $Pu_x + Qu_y + Ru_z = 0$.

(b) Mostre que se $\tilde{z}(x, y)$ é outra solução da mesma equação independente de $z(x, y)$ dada implicitamente por

$$v(x, y, z) = c_2 \text{ então}$$

$$\frac{P}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)}} = \frac{Q}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(z, x)}} = \frac{R}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}}.$$

Mas, do exercício (7), obtivemos que para uma F arbitrária, a solução da equação $F(u, v) = 0$ satisfaz à E.D.P.

$$p \frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)} + q \frac{\partial(u, v)}{\partial(z, x)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}.$$

Conclua que a solução geral de (1) é da forma

$$F(u, v) = 0$$

para F arbitrária de classe C^1 , e $u(x, y, z) = c_1$, $v(x, y, z) = c_2$ são duas soluções independentes do sistema

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}$$

(c) Encontre a solução geral das E.D.P's abaixo.

(i) $xp + yq = z$.

(ii) $yzp + xzq = xy$

(iii) $x^2p + y^2q = (x + y)z$

(iv) $z_t + zz_x = 0$. Neste exemplo encontre uma solução geral da forma $z(x, t) = \varphi(x - zt)$. Verique que de fato $z(x, y)$ satisfaz a E.D.P. Em seguida determine φ de modo que $z(x, 0) = -x$, explicitando $z(x, t)$ em termos de x e de t , estudando o comportamento desta solução quando $t \rightarrow 1$.

(13) Considere as aplicações diferenciáveis $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ abaixo, onde $\Omega = \mathbb{R}^2$ ou $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Determine o conjunto dos pontos singulares $\mathcal{S} \subset \Omega$, suas imagens $X(\mathcal{S})$ e os abertos $U = \Omega \setminus \mathcal{S}$ tais que estas aplicações restritas a estes abertos determinam imersões. Exiba também a equação do plano tangente num ponto regular. Use o MAPLE para traçar o gráfico da superfície em torno de um ponto singular.

(a) $x = u^2 + u - v^2, y = v(2u + 1), z = u^2 + v^2$. O conjunto dos pontos singulares é unitário.

(b) $x = u + 1/u, y = v + 1/v, z = u/v + v/u$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. O conjunto de pontos singulares é constituído de quatro pontos.

(c) $x = u + v, y = u^2 + v^2, z = u^3 + v^3$. O conjunto dos pontos singulares é uma curva.

(14) Dê exemplos de três funções $F(x, y) = 0$, satisfazendo

$$F(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0 \text{ tal que}$$

(a) O conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; F(x, y) = 0\}$ não é um gráfico de uma função $y = f(x)$ ou $x = g(y)$, localmente, ao redor de $(0, 0)$.

(b) O conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; F(x, y) = 0\}$ é da forma $y = f(x)$, mas f não é diferenciável em $x = 0$.

(c) O conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; F(x, y) = 0\}$ é da forma $y = f(x)$ com f de classe C^1 .

(d) Compare os resultados anteriores com o teorema da função implícita.

- (15) Dê exemplo de uma curva imersa no plano \mathbb{R}^2 que não é propriamente imersa.
- (16) Dê exemplo de uma curva propriamente imersa no plano \mathbb{R}^2 que não é mergulhada.
- (17) Dê exemplos equivalentes aos dos dois exercícios anteriores considerando superfícies imersas em \mathbb{R}^3 .
- (18) Defina convexidade local para uma superfície dando exemplos disto. Idem para convexidade global, analisando exemplos compactos sem bordo (fechados). Analise também exemplos não compactos e completos.
- (19) Uma oval de Cassini é o conjunto dos pontos (x, y) do plano que está definido como o *lugar geométrico* dos pontos cujas produto das distância de (x, y) a dois pontos fixados (chamados de focos) é constante. Assumindo que os focos são $(\pm a, 0)$ e que a distância constante é b^2 , encontre a equação cartesiana do conjunto (definição implícita da oval de Cassini). Estude as ovais de Cassini, fazendo uso do MAPLE, considerando os casos $a^2 > b^2$, e $a^2 < b^2$ separadamente.