

## LISTA 4 DE GEOMETRIA DIFERENCIAL 2007

RICARDO SA EARP

- (1) Considere a esfera unitária  $\mathbb{S}^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  em  $\mathbb{R}^3$ .  
 (a) Mostre que a *projeção estereográfica usual do pólo norte* é dada por

$$\Pi_N(x, y, z) = \frac{x + iy}{1 - z} := u + iv := E$$

dando a interpretação geométrica desta aplicação.

- (b) Mostre que  $\Pi_N$  leva círculos da esfera em círculos ou retas no plano, determinando geometricamente cada situação.  
 (c) Mostre que  $\Pi_N$  preserva os ângulos mas inverte as suas orientações.  
 (d) Mostre que a inversa é dada por

$$z \mapsto \left( \frac{2u}{E\bar{E} + 1}, \frac{2v}{E\bar{E} + 1}, \frac{E\bar{E} - 1}{E\bar{E} + 1} \right)$$

onde  $E\bar{E} = u^2 + v^2$ .

- (e) Mostre que a métrica Euclideana  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  em  $\mathbb{R}^3$  induzida em  $\mathbb{S}^2$ , induz em  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  a seguinte métrica

$$ds^2 = \frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^2} (du^2 + dv^2).$$

- (f) A curvatura de Gauss de uma superfície Riemanniana é um invariante intrínseco (depende apenas da métrica). Em termos de coordenadas isotérmicas  $z = x + iy$  pode ser escrita como

$$K = -\frac{\Delta \log \lambda}{\lambda^2}$$

onde a métrica em termos das coordenadas isotérmicas (conformes)  $z = x + iy$ , é dada por  $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$ .

Mostre que a curvatura de Gauss da referida métrica esférica é  $K \equiv +1$ .

- (g) Mostre que uma isometria positiva da referida métrica é o conjunto das transformações de Möbius da forma

$$T(z) = \frac{az - \bar{c}}{cz + \bar{a}}$$

satisfazendo  $|a|^2 + |c|^2 = 1$ ,  $a, c \in \mathbb{C}$ .

- (h) Mostre que para cada tal isometria positiva  $T$  correspondem  $z$  e  $\frac{-1}{\bar{z}}$  fixados por  $T$ . Note que  $T$  é “elíptica”, você sabe justificar esta terminologia ?
- (i) A aplicação  $z \mapsto 1/z$  é uma isometria positiva ? Descreva-a geometricamente.
- (j) Mostre que os meridianos na esfera são as únicas geodésicas da esfera.
- (k) Mostre que dados dois pontos  $p$  e  $q$  de  $\mathbb{S}^2$  existe uma isometria positiva de  $\mathbb{S}^2$  que leva  $p$  em  $q$ .
- (l) Mostre que dadas duas geodésicas  $C_1$  e  $C_2$  de  $\mathbb{S}^2$  existe uma isometria positiva de  $\mathbb{S}^2$  que leva  $C_1$  em  $C_2$ .
- (m) Uma curva na esfera que faz ângulo constante com os meridianos da esfera é chamada de *loxodrômica*.
- (i) Mostre que a imagem de uma loxodrômica pela *projeção estereográfica* é uma espiral logarítmica.
- (ii) Usando coordenadas esféricas, encontre uma equação diferencial de primeira ordem que as loxodrômicas satisfazem. Em seguida exiba uma fórmula explícita. Com a ajuda do MAPLE esboce uma loxodrômica na esfera estudando sua curvatura e sua torção.
- (2) Encontre todas as geodésicas do cilindro.
- (3) Considere a superfície de revolução da *catenária*, chamada de *catenóide* dada por  $x = a \cosh v \cos u$ ,  $y = a \cosh v \sin u$ ,  $z = av$ ;  $0 < u < 2\pi$ ,  $v \in \mathbb{R}$  (“catenóide menos um meridiano”). O catenóide é a única *superfície mínima de revolução* de  $\mathbb{R}^3$ . Considere o *helicóide* de  $\mathbb{R}^3$  parametrizado por  $x = a\bar{v} \cos \bar{u}$ ,  $y = a \sinh \bar{v} \sin \bar{u}$ ,  $z = a\bar{u}$ ;  $0 < \bar{u} < 2\pi$ ,  $\bar{v} \in \mathbb{R}$  (“pedaço do helicóide entre as alturas  $z = 0$ , e  $z = 2\pi a$ ”). O helicóide é a única *superfície mínima regrada* de  $\mathbb{R}^3$ .
- (a) Encontre uma definição geométrica do helicóide.
- (b) Mostre que o helicóide é invariante por um grupo a 1-parâmetro de isometrias de  $\mathbb{R}^3$  (*screw motions*).
- (c) Estude as curvas coordenadas do catenóide e helicóide.
- (d) Encontre uma definição geométrica do helicóide.
- (e) Mostre que o catenóide e o helicóide são localmente isométricos. *Sugestão*: Aqui é preciso *reparametrizar* o helicóide para ver isto.
- (f) Encontre uma família a 1-parâmetro de superfícies isométricas ligando o catenóide ao helicóide. Tal família é constituída de *superfícies mínimas invariantes por screw*

*motions*, chamada de família *associada*. O catenóide é *conjugado* ao helicóide. Desenhe tal família, fazendo uso do MAPLE.

- (4) Considere o plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2 = \{z = x + iy, y > 0\}$  munido da métrica hiperbólica  $ds^2 = \frac{1}{(\Im z)^2}(dx^2 + dy^2)$ .
- Classifique todas as geodésicas de  $\mathbb{H}^2$ .
  - Mostre que a curvatura de Gauss  $K \equiv -1$ .
  - Calcule o comprimento do círculo hiperbólico de raio hiperbólico  $\rho$ .
  - Calcule a área do disco hiperbólico de raio hiperbólico  $\rho$ .
- (5) Mostre que  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, (\theta, \varphi) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta, \sin \theta, \cos \varphi, \sin \varphi)$ , é uma imersão de  $\mathbb{R}^2$  na esfera unitária  $\mathbb{S}^3$ . A imagem  $X(\mathbb{R}^2)$  é uma *superfície mínima* de  $\mathbb{S}^3$ , chamada de *toro de Clifford*. Mostre que  $\{(-\sin \theta, \cos \theta, 0, 0), (0, 0, -\sin \varphi, \cos \varphi)\}$  é um referencial ortornormal do espaço tangente e que  $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta, \sin \theta, \cos \varphi, \sin \varphi), \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos \theta, -\sin \theta, \cos \varphi, \sin \varphi)\}$ , é uma base ortornormal do espaço normal ao toro de Clifford (em  $\mathbb{R}^4$ ).
- (6) Seja  $g_1$  a métrica de  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Seja  $(dr)^2$  a métrica canônica de  $I = (0, \infty)$ . Defina-se a métrica  $g$  em  $\mathbb{S}^{n-1} \times I$ , por  $g_{m,r} = r^2 \cdot g_1 + (dr)^2, m \in \mathbb{S}^{n-1}, r \in I$
- Será que  $g$  é a métrica produto ?
  - Deduzir que  $(\mathbb{S}^{n-1} \times I, g)$  é isométrica à métrica de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  munida da métrica Euclideana.
  - Mostrar que  $(\mathbb{S}^{n-1} \times I, g_1 \times (dr)^2)$  é isométrica ao cilindro  $\mathcal{C} = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1; x_0 > 0\}$  munido da métrica induzida de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .
- (7) Considere a aplicação  $f : \mathbb{R}^n \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , por  $f(z, r) := (x, t) = (\sin r \cdot z, \cos r)$ ,  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n, r \in (0, \pi)$ .
- Deduzir que  $f$  determina um difeomorfismo  $g : \mathbb{S}^{n-1} \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  por  $g(z, r) = (\sin r \cdot z, \cos r)$ .
  - Deduzir que a métrica induzida em  $\mathbb{S}^{n-1} \times (0, \pi)$ , pela métrica canônica de  $\mathbb{S}^n$ , dada pela restrição da métrica canônica de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, dt^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2$  à  $\mathbb{S}^n$ , é dada por  $dr^2 + \sin^2 r ds_{n-1}^2$ , onde  $ds_{n-1}^2$  é a métrica canônica de  $\mathbb{S}^{n-1}$ , que é a restrição da métrica Euclideana  $dz_1^2 + \dots + dz_n^2$  à  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Mostre que os meridianos são geodésicas de  $\mathbb{S}^n$ .

OBS: Uma consideração análoga pode-se fazer para as métricas  $dt^2 + \sin^2 t ds_p^2 + \cos^2 t ds_q^2$  em  $\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q \times (0, \pi/2)$ , considerando

a aplicação  $\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q \times (0, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{q+1}$ ,  
 $(x, y, t) \mapsto (x \cdot \sin t, y \cdot \cos t)$ . Tais métricas são chamadas são chamadas de “warped products” (logo, a métrica canônica da esfera pode ser vista assim). Aqui  $ds_p^2$ , denota a métrica canônica da esfera  $\mathbb{S}^p$ .

- (8) Considere  $S$  uma superfície de revolução em torno do eixo  $z$  parametrizada por  $X(u, \theta) = (a(u) \cos \theta, a(u) \sin \theta, c(u))$ ,  $u \in I$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , onde  $I \subset [0, \infty)$  é um intervalo da reta e  $a(u) \geq 0$ .
- (a) Calcule o comprimento de um paralelo.
  - (b) Calcule a métrica de  $S$  no sistema de coordenadas  $(u, \theta)$ .
  - (c) Mostre que os meridianos são geodésicas de  $S$ .