LISTA 5 DE GEOMETRIA DIFERENCIAL 2007

RICARDO SA EARP

(1) Seja $\mathbb{M}$ uma variedade Riemanniana de dimensão 2 (superfície Riemanniana). Seja $z = x + iy, z \in U$, U aberto, coordenada conforme em $\mathbb{M}$, i.e $f : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{M}$, $z \mapsto f(z) \in \mathbb{M}$, é uma parametrização conforme, em que a métrica induzida ds^2 em U oriunda da métrica de $\mathbb{M}$ está dada por $ds^2 = \sigma^2|dz|^2$. Diz-se informalmente que ds^2 é uma métrica conforme em $\mathbb{M}$ (identificando U com sua imagem em $V := f(U) \subset \mathbb{M}$).

Agora, considere o espaço produto $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$ munido da métrica produto. Assim (x, y, t) são coordenadas locais em $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$ ($z = x + iy$ são cordenadas conformes (ou isotérmicas) em $\mathbb{M}$ e t é a coordenada usual de $\mathbb{R}$). Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio e seja $X : \Omega \looparrowright \mathbb{M} \times \mathbb{R}$, $w \mapsto (h(w), f(w))$,
$w = u + iv, u, v \in \mathbb{R}$ uma imersão de Ω em $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$ (imagina $h(\Omega) \subset V$). Diz-se que $h(w)$ é a componente horizontal e que $f(w)$ é a componente vertical. Seja $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}, \partial_y := \frac{\partial}{\partial y}, \partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$, o referencial local do espaço tangente, onde ∂_x, ∂_y é um referencial do plano tangente à $\mathbb{M}$ adaptado à f e ∂_t é o campo vertical canônico tangente à "reta" $t \mapsto (*, t), * \in \mathbb{M}$.

Relembre a notação complexa: Se g é uma função suave diferenciável (complexa) em Ω então, define-se os operadores (complexos) $g_w := \frac{1}{2}\left(g_u - ig_v\right)$, e $g_{\overline{w}} := \frac{1}{2}\left(g_u + ig_v\right)$.

(a) Mostre que $X : \Omega \looparrowright \mathbb{M} \times \mathbb{R}$, $w = u + iv \mapsto (h(w), f(w))$, é uma imersão conforme, se e só se $(f_w)^2 = -(\sigma \circ h)^2 h_w \overline{h}_w$.

(b) Conclua que a métrica induzida por X, escrita da forma $\mu^2|dw|^2$, está dada por (usando a linguagem complexa) $\mu^2 = (\sigma \circ h)^2 \left(|h_w| + |h_{\overline{w}}|\right)^2$.

(2) Considere o disco de Poincaré $\mathbb{H}^2$, i.e o disco aberto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$, munido da métrica hiperbólica $\frac{4}{(1-|z|^2)^2}|dz|^2$. Seja ρ a *distância hiperbólica* de um ponto (x, y) à origem (raio hiperbólico).

(a) Mostre que $R = \sqrt{x^2 + y^2} = \tanh \rho/2$.

(b) Mostre que a métrica ds^2 no produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, t), é dada por
$ds^2 = d\rho^2 + \sinh^2 \rho \, d\theta + dt^2$.

(c) Seja $\ell \in \mathbb{R}$. Seja S uma superfície imersa em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ dada por

$$X(\rho(s), \varphi(s,\tau)) = (\tanh \rho/2 \, \cos\varphi, \tanh \rho/2 \, \sin\varphi, \lambda(\rho) + \ell\varphi) \, , \; s, \tau \in \mathbb{R}$$

Mostre que a métrica induzida em S , tomando coordenadas cilíndricas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, está dada por

$$\mathrm{d}\mu^2 = (1 + \lambda'^2)\, \mathrm{d}\rho^2 + 2\ell\lambda' \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi + (\ell^2 + \sinh^2 \rho)\, \mathrm{d}\varphi^2$$

(3) Considerando $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, com a métrica esférica $\frac{4}{(1+|z|^2)^2} \, |dz|^2$, faça uma análise parecida com a que foi feita acima no item (2) considerando coordenadas cilíndricas (ρ, θ, t) em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, trocando $\sinh \rho \to \sin \rho$.

(4) Considere $\mathbb{R}^{1,n+1} := \mathbb{R}^{n+2}$ munido com a *métrica de Lorentz* $Q == dx_0^2 + dx_1^2 + dx_3^3 \cdots + dx_{n+1}^2$. A seguinte superfície "space-like" $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{1,n+1}$ com a *métrica Riemanniana induzida* dá origem ao *modelo de Minkowski* do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$:
$S := \{x = (x_0, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{n+2}; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1}, x_0 > 0, Q(x) = |\boldsymbol{x}|^2 - x_0^2 = -1\}$.
Por definição o grupo de isometrias de $\mathcal{S}$, denotado por $O^+(1, n+1)$ preserva esta métrica.

(a) Considere as matrizes

$$\begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 & \cdots & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Mostre que o conjunto de tais matrizes constitue um subgrupo $\Gamma \subset O^+(1, n+1)$ a 1-parâmetro de isometrias de $\mathcal{S}$

(b) Mostre que com a ajuda de uma "rotação horizontal", que é uma isometria de $\mathcal{S}$, pode-se levar qualquer ponto $(x_0, \boldsymbol{x}) \in \mathcal{S}$ num ponto da forma $v = (x_0, |\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\varepsilon}_1) \in \mathcal{S}$, onde $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$. Logo como $v \in \mathcal{S}$, pode-se escrever v da forma $v = (\cosh s, \sinh s \, \boldsymbol{\varepsilon}_1)$, para algum $s \in \mathbb{R}$.

(c) Mostre que com a ajuda do subgrupo Γ acima pode-se enviar v ao ponto $(1, 0)$, tomando $t = -s$.

(d) Conclua que o grupo de isometrias de $\mathcal{S}$ age transitivamente em $\mathcal{S}$.

(5) Mostre que o círculo hiperbólico de raio hiperbólico ρ centrado no ponto i de $\mathbb{H}^2$ está dado por

$$\begin{aligned} x &= \sinh\rho\,\cos\theta \\ y &= \sinh\rho\,\sin\theta + \cosh\rho, \qquad\qquad \theta \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

Logo, é um círculo Euclideano de centro $(0, \cosh\rho)$ e raio $R = \sinh\rho$.

(6) Mostre que o comprimento de um círculo hiperbólico em $\mathcal{D}$ de raio hiperbólico $\rho > 0$ é $2\pi\sinh\rho$ e que a área de um disco hiperbólico em $\mathcal{D}$ de raio hiperbólico ρ é $4\pi\sinh^2\rho/2$.

(7) Seja $\mathbb{H}^3 := \{(x, y, z);\ z > 0\}$. Considere a semi-esfera $S = S_r(a) := \{p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ |p - a|_{\mathbb{R}^3} = r, z > 0\}$, onde $a \in \{(x, y, z);\ z = 0\}$ e $r > 0$. Considere a em reflexão, ou *simetria* ou *inversão* com respeito à S definida por

$$I(p) = a + \frac{r^2}{|p - a|^2_{\mathbb{R}^3}} \cdot (p - a)$$

(a) Mostre que I é um difeomorfismo anti-conforme preservando $\mathbb{H}^3$, levando $\partial_\infty\mathbb{H}^3$ em si mesmo, deixando fixos todos os pontos de S e satisfazendo $I \circ I(p) = p$, para todos os pontos $p \in \mathbb{H}^3$. Mostre que I provém de uma única inversão em um círculo em $\partial_\infty\mathbb{H}^3 \equiv \mathbb{C} \cap \{\infty\}$.

(b) Mostre que I leva as calotas esféricas, , semi-planos verticais, semi-planos inclinados, planos horizontais, esferas em $\mathbb{H}^3$ em calotas esféricas, ou semi-planos verticais, ou semi-planos inclinados, ou planos horizontais ou esferas em $\mathbb{H}^3$. Deduza que I leva círculos ou retas em círculos ou retas. Faça um exame minucioso e discuta cada caso separadamente examinando todas as possibilidades como você fez, anteriormente, com as inversões em círculos.

(c) Mostre que se $p, q \in \mathbb{H}^3$, então

$$|I(p) - I(q)|_{\mathbb{R}^3} = \frac{r^2|p - q|_{\mathbb{R}^3}}{|p - a|_{\mathbb{R}^3}|q - a|_{\mathbb{R}^3}}$$

Considere $\mathbb{H}^3$ o espaço hiperbólico munido da métrica hiperbólica

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{z^2} \cdot \left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\right)$$

(8) Mostre *com todos os detalhes* que a inversão I do item 1) é uma isometria *negativa* de $\mathbb{H}^3$.

Lembremos que as *geodésicas* de $\mathbb{H}^3$ são as semi-retas verticais contidas em $\mathbb{H}^3$ partindo do bordo assimptótico ($\partial_\infty \mathbb{H}^3$) e os semi-círculos em $\mathbb{H}^3$ ortogonais à $\partial_\infty \mathbb{H}^3$.

(9) Mostre que de fato as curvas descritas logo acima são todas as geodésicas de $\mathbb{H}^3$. Mostre que dada duas geodésicas γ_1 e γ_2 existe uma isometria positiva de $\mathbb{H}^3$ levando γ_1 em γ_2.

(10) Mostre que $F : B^3 \to \mathbb{H}^3$ definida por $F(x, y, z) = \dfrac{2(x, y, z+1)}{x^2 + y^2 + (z+1)^2} - (0, 0, 1)$ produz uma isometria global de B^3 em $\mathbb{H}^3$ que inverte orientações . Descreva geometricamente F e dê sua inversa. Além disso modifique ligeiramente F e obtenha uma isometria positiva. Descreva as geodésicas no modelo da bola.
NOTA:
Dizemos que uma superfície M é *totalmente geodésica*, se dado um ponto p de M tem-se que toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de $\mathbb{H}^3$. Dizemos que uma superfície M é uma superfície *equidistante* se M é o lugar geométrico dos pontos em $\mathbb{H}^3$ que possuem mesma distância fixada ρ de uma superfície totalmente geodésica. Dizemos que M é uma *esfera geodésica* se M é o lugar geométrico dos pontos em $\mathbb{H}^3$ que possuem mesma distância fixada ρ de um ponto fixado p. Dizemos que M é uma horosfera se existe $p \in M$ tal que M é o limite em $\mathbb{H}^3$ de esferas de raios variados ρ que passam por p fazendo $\rho \to \infty$. Tais superfícies geométricas são totalmente umbílicas em $\mathbb{H}^3$.