LISTA 6 DE GEOMETRIA DIFERENCIAL 2007

RICARDO SA EARP

Vamos tratar a Geometria Diferencial das curvas e superfícies de $\mathbb{R}^3$. Vamos aplicar as equações de compatibilidade; equação de curvatura de Gauss e equação de Codazzi-Mainardi.
Você que está interessado em aprofundar os seus estudo na *Geometria Diferencial* é aconselhado a fazer as devidas analogias com curvas e superfícies de $\mathbb{H}^3$. Seja S uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$ orientada por um campo de vetores normais unitários N. Seja γ uma curva regular *em* S parametrizada pelo comprimento de arco s. Seja $\gamma''(s)$ o vetor aceleração (ou curvatura) da curva γ em $\mathbb{R}^3$. *A componente tangencial* de $\gamma''(s)$, denotada por

$$\frac{\mathrm{D}\gamma'(s)}{\mathrm{d}s}$$

é chamada de *vetor curvatura da curva* γ *em* S.

Lembremos que uma curva regular γ na superfície orientada S admite um vetor canônico normal unitário η ao longo de γ definido como segue: Seja η o campo normal unitário ao longo de γ de modo que $\{\gamma'(s), \eta(s)\}$ (nesta ordem) determina a orientação de $T_{\gamma(s)}S$, do plano tangente à S em $\gamma(s)$. Ou seja $\nu(s) := N(\gamma(s))$ está dado por

$$\nu(s) = \gamma'(s) \times \eta(s)$$

A *curvatura geodésica*, denotada por k_g, está definida como sendo a componente do vetor curvatura na direção η pela fórmula

$$\frac{\mathrm{D}\gamma'(s)}{\mathrm{d}s} = k_g(s)\eta(s)$$

Note que $\dfrac{\mathrm{D}\gamma'(s)}{\mathrm{d}s} \cdot \gamma'(s) = 0$.

Lembre que a *curvatura normal* k_N, a curvatura geodésica k_g e a curvatura da curva k de γ satisfazem

$$k^2 = k_N^2 + k_g^2$$

(1) Verifique a fórmula acima num paralelo da esfera $\mathbb{S}^2$. Calcule a curvatura geodésica de um paralelo em termos do raio (geodésico), assim como em termos do raio Euclideano do paralelo.
Suponha que $\gamma(0) = p \in S$ e que $\gamma'(0) = v \in T_pS$.

Dizemos que um vetor tangente v a uma superfície S num ponto p de S é *assimptótico*, se a curvatura normal k_N nesta direção se anula. Uma curva assimptótica em S é uma curva regular tal que cada vetor tangente determina uma direção assimptótica.

Uma curva regular em S na qual cada reta tangente determina uma *direção principal*, i. e o vetor diretor é principal, é chamada de linha de curvatura.

Dizemos que um ponto p de S é *umbílico* se todas as curvaturas principais k_1 e k_2 de S são iguais em p, i. e $k_1(p) = k_2(p)$. Dizemos que S é *totalmente umbílica* se todos os pontos de M são umbílicos.

Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular S, ou uma parametrização local de uma superfície regular S, em torno de um ponto p de S. Seja N um normal unitário ao longo de S.

Sejam, usando várias notações, $E = g_{11} = \langle X_u, X_u\rangle, F = g_{12} = \langle X_u, X_v\rangle, G = g_{22} = \langle X_v, X_v\rangle$ os coeficientes da primeira forma fundamental. Sejam $e = l = b_{11} = \langle N, X_{uu}\rangle, f = m = b_{12} = \langle N, X_{uv}\rangle, g = n = b_{22} = \langle N, X_{uu}\rangle$ os coeficientes da segunda forma fundamental (N é normal unitário à imersão X).

(2) Use as equações de Codazzi-Mainardi para mostrar que se uma superfície regular conexa $S \subset \mathbb{R}^3$ é totalmente umbílica, então todas as curvaturas principais são iguais e constante. Classifique todas as superfícies completas totalmente umbílicas de $\mathbb{R}^3$, fazendo uso da classificação das curvas planas de curvatura constante de $\mathbb{R}^2$.

(3) Estabeleça a equação das linhas de curvatura num sistema de coordenadas locais numa vizinhança de um ponto não umbílico. Deduza que as curvas coordenadas de uma parametrização são linhas de curvatura sse as matrizes da primeira e segunda forma fundamental (no referencial adaptado) são diagonais. Ou seja, nas várias notações $F = g_{12} = 0$ e $f = m = b_{12} = 0$. Deduza que os paralelos e os meridianos de uma superfície de revolução são linhas de curvatura.

(4) Estabeleça a equação das linhas assimptóticas num sistema de coordenadas locais.

(5) Mostre que se v é um vetor assimptótico, então ou a curvatura k de γ se anula em $s = 0$ ou $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ é ortogonal à $N(p)$, onde $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ é o unitário na direção de $\gamma''(s)$.

(6) Mostre que se uma curva regular γ não é parametrizada pelo comprimento de arco então

$$k_N(t) = \frac{II(\gamma'(t), \gamma'(t))}{|\gamma'(t)|^2}$$

Vamos agora considerar o referencial de Darboux em vez do mais conhecido referencial de Frenet: Dada γ uma curva em S parametrizada pelo comprimento de arco s considere

$$T(s) = \gamma'(s), \qquad \eta(s), \qquad \nu(s) = T(s) \times \eta(s) = N(\gamma(s))$$

De fato, observe que

$$\nu'(0) = \frac{DN(\gamma(s))}{\mathrm{d}s} \qquad \text{em} \;\; s = 0$$

(7) Mostre que existe uma função $\tau_g(s)$, chamada de torção geodésica, tal que

$$\begin{aligned} T'(s) &= \qquad\qquad k_g\eta + k_N\nu \\ \eta'(s) &= -k_gT \qquad\qquad + \tau_g\nu \\ \nu'(s) &= -k_NT - \tau_g\eta \end{aligned}$$

Note que como $\nu'(0)$ depende apenas de $T(0)$, a terceira equação acima mostra que K_N (o que já sabíamos de antemão) e τ_g dependem apenas de T; podemos escrever que $k_N = k_N(v)$ e $\tau_g = \tau_g(v)$, para v unitário tangente.

(8) Deduza das equações acima que se $\{v, w\}$, $v = \gamma'(0)$, é uma base ortornormal, positivamente orientada, de T_pS então

$$\begin{aligned} k_N(v) &= -D_pN(v) \cdot v = II(v, v) \\ \tau_g(v) &= -D_pN(v) \cdot w = II(v, w) \end{aligned}$$

Aproveite o ensejo para re-demonstrar a relação de Euler

(9) Mostre que se $e_1, e_2 \in T_pS$ são direções principais com $\{e_1, e_2\}$ uma base ortornormal positivamente orientada, se θ é o ângulo orientado que o vetor unitário v, à partir de e_1, faz com e_1, então

$$k_N(v) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$$

onde k_1, k_2 são as curvaturas principais de S em p.

(10) Com as notações do item b) logo acima mostre que

$$\tau_g(v) = (k_2 - k_1) \sin\theta \cos\theta$$

Sugestão : Considere a equação obtida acima no item anterior $\tau_g(v) \;=\; -D_pN(v) \cdot w \;=\; II(v, w)$.

(11) Deduza que γ é uma linha de curvatura, sse $\tau_g = 0$.
Dizemos que γ é uma *geodésica* se

$$\frac{\mathrm{D}\gamma'(s)}{\mathrm{d}s} \equiv 0$$

Segue das propriedades das geodésicas como veremos brevemente, a definição geométrica alternativa:“ Geodésicas são curvas que minimizam localmente o comprimento de arco”, como já vimos explicitamente no modelo da esfera $\mathbb{S}^2$ ($K = 1$) e no modelo do plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$.

(12) Estabeleça a equação das geodésicas num sistema de coordenadas locais.

(13) Mostre que γ é uma geodésica, sse $k_g = 0$. (ou ainda, sse, $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ quando definido é ortogonal à S.)

(14) Mostre que os meridianos de uma superfície de revolução são geodésicas. Quais as condições para que um paralelo seja uma geodésica ? Dê condições analíticas e geométricas.

(15) Determine todas as geodésicas no cilindro circular reto, tanto de um ponto de vista analítico quanto de um ponto de vista geométrico. Aproveite o ensejo e determine o tipo conforme do cilindro circular reto e do semi-cilindro circular reto. Encontre ou descreva um cilindro topologicamente equivalente ao cilindro circular reto, mas que não seja conformemente equivalente a este.

(16) Mostre que uma geodésica plana que não seja uma reta é uma linha de curvatura.

(17) Mostre que uma geodésica que é linha de curvatura é uma curva plana.

(18) Mostre que uma reta numa superfície S é uma linha assimptótica; conclua que a curvatura de Gauss satisfaz $K \leqslant 0$ ao longo de qualquer reta contida em S. Mostre que $K = 0$ ao longo da reta, sse o normal N é constante ao longo da reta.

(19) Determine as *equações de Clairaut* para as geodésicas de uma superfície de revolução, consultando algum livro clássico de Geometria Diferencial, e estude o comportamento das geodésicas das seguintes superfícies:
- cone
- parabolóide
- catenóide
- elipsóide
- ondulóide gerado por uma sinóide (ex: $y = \sin z$, o espaço de órbita é o plano yz e o eixo de revolução é o eixo z).

(20) Mostre o teorema de Beltrami-Enneper: Se γ é uma curva assimptótica com $\gamma(0) = p$ e $k(0) \neq 0$, então

$$|\tau(0)| = \sqrt{-K(p)}$$

além disso, mostre que se $K(p) < 0$, e as duas curvas asimptóticas distintas em p têm curvatura diferente de zero em p, então suas torções em p são iguais e de sinais contrários. *Sugestão* : Parametrize γ pelo comprimento de arco. Mostre que $\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ é tangente à S em p, e assim $N = \boldsymbol{b} = T \times \overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ ($\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ é o unitário na direção de $\gamma''(s)$) Mostre que

$$-DN(T(s)) = -\boldsymbol{b}'(s) = -\tau(s) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{n}}$$

Veja que a matriz do operador de Weingarten $-DN : T_pS \to T_pS$ com respeito a base ortornormal $\{T(0), \overrightarrow{\boldsymbol{n}}(0)\}$ deve ter zero na diagonal principal e $-\tau(0)$ na outra diagonal (Notação: $DN = \overline{\nabla}N$). Conclua que $K(p) = -\tau(0)^2$. Para completar a demonstração (e re-obter a fórmula pedida) use a relação de Euler obtida anteriormente e uma certa fórmula obtida anteriormente).

(21) Demonstre o seguinte *teorema de Terquem-Joachimsthal*: Se γ é uma curva na interseção de duas superfícies S_1, S_2 que é uma linha de curvatura de S_1; então γ é uma linha de curvatura de S_2, sse S_1 e S_2 se interceptam num ângulo constante ao longo de γ.
   (a) Aplique o teorema para demonstrar que os meridianos são linhas de curvatura de uma superfície de revolução .
   (b) Aplique o teorema para mostrar que γ é uma linha de curvatura plana de S, sse a imagem esférica pela aplicação normal de Gauss $N \circ \gamma$ descreve uma circunferência.

Agora vamos tratar de propriedades geométricas de certas superfícies de $\mathbb{R}^3$.

(22) Considere as superfícies abaixo:
   (a) Estude o comportamento da curvatura de Gauss K quando $x^2 + y^2 \to \infty$, onde S está dada por
   $z = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + 2}$
   (b) (*sela de macaco*) Calcule os coeficientes da segunda forma fundamental e mostre que a curvatura média e de Gauss se anulam na origem:
   $z = x^3 - 3xy^2$
   (c) (*pseudo-esfera*) Considere S, a superfície (*pseudo-esfera*) obtida pela revolução da parte da *tractrix* contida no primeiro

quadrante aberto, em torno do eixo-y. Mostre que a curvatura de Gauss K de S é identicamente igual a -1.

(23) Investigue e classifique as superfícies de revolução de curvatura de Gauss $K \equiv +1$, fazendo uma análise geométrica de suas curvas geratrizes.

(24) Investigue e classifique as superfícies de revolução de curvatura de Gauss $K \equiv -1$, fazendo uma análise geométrica de suas curvas geratrizes.

(25) Considere a (*superfície mínima de Enneper*)

$$X(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right) \ u, v \in \mathbb{R}.$$

(a) Mostre que os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por $E = G = (1 + u^2 + v^2)^2, \ F = 0$, e mostre que Enneper é completa.
(b) Mostre que a superfície mínima de Enneper é globalmente conforme a $\mathbb{C}$, logo simplesmente conexa.
(c) Calcule os coeficientes da segunda forma fundamental de Enneper.
(d) Mostre que a superfície mínima de Enneper é de fato mínima, isto é de curvatura média $H = 0$.
(e) Você saberia mostrar que as linhas de curvatura de Enneper são curvas planas ?

(26) Mostre que o helicóide é globalment conforme a $\mathbb{C}$.

(a) Mostre que as linhas coordenadas do helicóide são linhas assimptóticas. Mostre que as linhas assimptóticas do helicóide são retas e hélices circulares. Será que as linhas coordenadas são geodésicas ? Estude o comportamento do normal unitário N ao helicóide ao longo das retas.
(b) Mostre que o helicóide é uma superfície mínima.
(c) Calcule a curvatura de Gauss do helicóide.
(d) Mostre que as linhas de curvatura do helicóide são hélices logarítmicas.

(27) Considere a *família catenóide-helicóide*, denotada $\mathcal{F}_\theta$. abaixo (Você não precisa fazer os itens feitos por você num lista anterior).

$$\mathcal{Z}_\theta = \cos\theta \cdot \mathcal{C}(u,v) + \sin\theta \cdot \mathcal{H}(u,v) \qquad \theta \in [0, 2\pi)$$

onde $\mathcal{C}(u,v) = (a\cosh v \cos u, a\cosh v \sin u, av)$ e
$\mathcal{H}(u,v) = (-a\sinh v \sin u, a\sinh v \cos u, -au)$, $0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty$, são parametrizações (locais) do catenóide e do helicóide, respectivamente (Explique isto !).

(a) Mostre que $\mathcal{F}_\theta$ é uma família a 1-parâmetro de superfícies helicoidais cujo passo depende de θ (Claro que para $\theta = 0$ obtemos o catenóide), ligando uma parte do catenóide à uma parte do helicóide.
(b) Mostre $\mathcal{F}_\theta$ é uma família a 1-parâmetro de superfícies *mínimas* isométricas, ligando uma parte do catenóide à uma parte do helicóide. Dizemos que $\mathcal{Z}_\theta,\ \theta \in (0, 2\pi)$ é uma *superfície associada* ao catenóide (helicóide).
(c) Conclua que o catenóide e o helicóide são localmente isométricos e, por uma isometria local, geodésicas no catenóide são levadas em geodésicas no helicóide (desenhe-as usando o Maple).
(d) Mostre que as linhas assimptóticas do catenóide são hélices logarítmicas.

(28) Considere S uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$ e seja N um campo de vetores normal (unitário) à S. A *superfície paralela* à S está definida por

$$S_t = S + tN$$

(a) Mostre que nos pontos regulares da superfície a curvatura média H_t e a curvatura de Gauss K_t de S_t são dadas por

$$H_t = \frac{H - Kt}{1 - 2Ht + Kt^2} \qquad K_t = \frac{K}{1 - 2Ht + Kt^2}$$

(b) Assuma que H é uma constante positiva. Assuma que M é completa com curvatura de Gauss K limitada. Mostre que as curvaturas média H_t e de Gauss K_t satisfazem a seguinte relação de *Weingarten*

$$2aH_t + K_t = b, \qquad a > 0, b \geqslant 0$$

para t suficientemente pequeno bem escolhido.
(c) Mostre ainda que, nas hipóteses do item i), quando $H = 0$ e $K >> -\infty$, M_t é imersa quando t é suficientemente pequeno.
(d) Dê um exemplo de um *fim* de uma superfície mínima tal que $K_t \to -\infty$, quando $\underset{p \in S_t}{\mathrm{p}} \to \partial S_t$.
(e) Finalmente mostre que M_t é uma *superfície especial de Weingarten* , ou seja existe uma função de classe C^1, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, tal que as curvaturas média e de Gauss satisfazem uma relação da forma

$$H_t = f(H_t^2 - K_t)$$

para f *elíptica*, i. e f satisfazendo

$$4t\,(f'(t))^2 < 1.$$

Conclua também que dentro de uma mesma classe de superfícies especiais de Weingarten existe uma bem determinada superfície totalmente umbílica.

(f) Considere uma superfície imersa S em $\mathbb{R}^3$ orientada por campo de vetores normal unitário N. Assuma que a curvatura média H é positiva e assuma que S satisfaz uma relação de Weingarten da forma

$$2aH + K = b, \qquad a > 0, b > 0$$

Que considerações e resultados análogos ao do item anterior você pode deduzir ?

(29) Mostre que *em parâmetros isotérmicas* $z = u+iv$, tem-se que: A curvatura média H e a curvatura de Gauss K de uma superfície S imersa em $\mathbb{R}^3$ são dados por

$$H = \frac{l+n}{2E} \qquad \text{e} \quad \mathrm{K} = \frac{\mathrm{ln} - \mathrm{m}^2}{\mathrm{E}^2}$$

Idem para uma superfície S imersa em $\mathbb{H}^3$.

(30) Deduza que equação das linhas de curvatura *via o método dos multiplicadores de Lagrange*, e infira que em coordenadas isotérmicas a equação das linhas de curvatura é dada por

$$-m\,\mathrm{d}u^2 + (l-n)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + m\,\mathrm{d}v^2 = 0$$

(31) Mostre as equações de Codazzi-Mainardi:

$$l_v - m_u = \frac{E_v}{2E}(l+n)$$
$$m_v - n_u = -\frac{E_u}{2E}(l+n)$$

Conclua

(32) As equações de Codazzi-Mainardi podem ser escritas como

$$\left(\frac{l-n}{2}\right)_u + m_v = EH_u$$
$$\left(\frac{l-n}{2}\right)_v - m_u = -EH_v$$

Sugestão : Parta dos termos a esquerda das equações propostas substituindo os termos pelas definições , em seguide use o fato de que N é normal unitário, X_u e X_v tangentes ortogonais e de mesmo módulo, aplicando simetria e compatibilidade com a métrica, para chegar ao resultado desejado.

Deduza

(33) Se $\phi = \dfrac{l-n}{2} - im$, as equações de Codazzi tomam a *forma complexa*

$$\phi_{\overline{z}} = EH_z$$

A equação (ou as equações) de Codazzi-Mainardi são *as mesmas* no espaço hiperbólico. Verifique isto ! onde $2\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial u} - i\dfrac{\partial}{\partial v}$, e $2\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial}{\partial u} + i\dfrac{\partial}{\partial v}$. Infira que S tem curvatura média contante, sse ϕ é holomorfa. Mostre que isto implica que os pontos umbílicos de uma superfície conexa S imersa em $\mathbb{R}^3$ de curvatura média contante são isolados ou S é totalmente umbílica. Mostre o mesmo para uma superfície de curvatura média constante imersa em $\mathbb{H}^3$.

(34) Mostre ainda que as linhas de curvatura são dadas pela equação

$$\Im\left(\phi \cdot (\mathrm{d}\,z)^2\right) = 0$$

Nota: Um fato que pode ser demonstrado é que quando S (conexa) tem curvatura média constante, o índice do campo de linhas de curvatura num ponto singular (i. e num ponto umbílico, necessariamente isolado, se S não é totalmente umbílica) é estritamente negativo. Segue disto, e do teorema de Poincaré-Hopf, o seguinte teorema de Hopf demonstrado nos meados do século vinte. Tal resultado deu um novo impulso à teoria das superfícies de curvatura média constante: *Se uma superfície fechada imersa S em $\mathbb{R}^3$ (não necessariamente mergulhada), topologicamente equivalente a esfera , tem curvatura média constante então S é uma esfera geométrica.* Enuncie e demonstre o correspondente teorema de Hopf no espaço hiperbólico.

(35) Mostre que quando S tem curvatura média constante a diferencial holomorfa quadrática

$$\phi \cdot (\mathrm{d}\,z)^2$$

está globalmente bem definida em S, i. e não depende das escolhas dos parâmetros isotérmicos.

(36) Mostre a seguinte fórmula

$$\triangle X = 2\,\overrightarrow{H}$$

onde $\overrightarrow{H}$ ó vetor curvatura média de S (Note que você pode interpretar X como sendo o vetor posição de S).

Conclua a seguinte caracterização das superfícies mínimas:

$$S \quad \text{é mínima} \qquad \Longleftrightarrow \triangle X = 0$$

Ou seja S é mínima, sse as coordenadas de S em $\mathbb{R}^3$ em parâmetros isotérmicos são funções harmônicas.

(37) A idéia agora é enfocar o seguinte: Sejam k_1, τ_1, k_2, τ_2 as curvaturas e torções de duas linhas de curvatura (curvatura e torção destas curvas como sendo curvas de $\mathbb{R}^3$!) passando por um ponto não umbílico de uma *imersão mínima conforme* $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$, ($U$ aberto de $\mathbb{R}^2$) ($E = G, F = 0$). Então demonstre o *teorema de Enneper* deduzindo a seguinte fórmula

$$k_1^2 \tau_1 = k_2^2 \tau_2$$

Sugestão : Considere os parâmetros isotérmicos $z = u + iv$, i. e $X = X(z)$. Admita o fato que estes parâmetros podem ser escolhidos (nas vizinhanças de um ponto não umbílico) de forma que as linhas coordenadas sejam linhas de curvatura. Mostre que isto implica que $m = 0$ e que as equações de Codazzi-Mainardi ficam ($F = m = 0$)

$$l_v = \frac{E_v}{2} \left(\frac{l}{E} + \frac{n}{G} \right)$$
$$n_u = \frac{G_u}{2} \left(\frac{l}{E} + \frac{n}{G} \right)$$

Donde conclua que $l = -n = b,\ b \in \mathbb{R}$ (constante). Em seguida use as fórmulas da curvatura e da torção

$$\tau_1 k_1^2 = -\frac{X_u \times X_{uu} \cdot X_{uuu}}{|X_u \times X_{uu}|^2} \cdot \frac{|X_u \times X_{uu}|^2}{|X_u|^6}$$

Para concluir escreva $X_u \times X_{uu} \cdot X_{uuu}$ em termo das derivadas parciais de E com respeito a u e v. Daí segue o resultado desejado.

(38) Deduza do teorema de Enneper acima a seguinte proposição : Se uma família de linhas de curvatura de uma superfície mínima é constituída por curvas planas, assim também o é a família de linhas de curvatura ortogonal, numa vizinhança de um ponto não umbílico. Nota: As superfícies mínimas (não planas) cujas linhas de curvatura são curvas planas foram classificadas : Estas são o catenóide, a superfície mínima de Enneper e as superfícies de Bonnet.

(39) Seja $p \in M$, um ponto não umbílico de uma superfície M em $\mathbb{R}^3$.

(a) Mostre que existe um referencial ortornormal $\{X_1, X_2\}$ numa vizinhança de p *principal*, i.e, $AX_i = k_i\, X_i, i = 1, 2$, onde A é o *operador de Weingarten* que representa a segunda forma fundamental de M. Logo, k_1 e k_2 são as curvaturas principais de M sendo $k_2(p) > k_1(p)$.

(b) Seja ∇ a conexão de M. Encontre uma fórmula para k_1 e k_2 em termo das curvaturas média e de Gauss. Mostre que as quantidades $\nabla_{X_2}X_1$, $\nabla_{X_1}X_2$, $\nabla_{X_1}X_1$, $\nabla_{X_2}X_2$ estão determinadas por funções a, b que dependem apenas de k_1, k_2 e das suas derivadas com respeito a X_1, X_2. Precisamente, mostre que numa vizinhança u de p:

$$\nabla_{X_2}X_1 = b\, X_2, \quad \nabla_{X_2}X_2 = -b\, X_1$$
$$\nabla_{X_1}X_2 = a\, X_1, \quad \nabla_{X_1}X_1 = -a\, X_2$$
$$[X_1, X_2] = a\, X_1 - b\, X_2$$

onde $a = \dfrac{X_2(k_1)}{k_2 - k_1}$ e $b = -\dfrac{X_1(k_2)}{k_2 - k_1}$. Além disto, mostre que a curvatura de Gauss K satisfaz

$$K := k_1\, k_2 = \frac{((X_1^2 k_2) - (X_2^2 k_1))(k_2 - k_1)}{(k_2 - k_1)^2} - \frac{(X_1 k_2)(2(X_1 k_2) - (X_1 k_1))}{(k_2 - k_1)^2} + \frac{(X_2 k_1)((X_2 k_2) - 2(X_2 k_1))}{(k_2 - k_1)^2}$$

em U. *Sugestões*: As primeiras equações seguem da compatibilidade, da simetria e das equações de Codazzi. Enquanto que a segunda equação segue da equação de curvatura de Gauss: $K = k_1 k_2 = \langle R(X_1, X_2)X_1, X_2\rangle$, onde R é o tensor de curvatura de M.

(c) Mostre que se p é um ponto crítico para ambas as curvaturas principais k_1 e k_2 então $K(p) = \dfrac{(X_1^2 k_2) - (X_2^2 k_1)}{(k_2 - k_1)}$. Conclua o *lema de Hilbert*: Se K é uma constante positiva então k_1 não pode assumir um máximo (e k_2 não pode assumir um mínimo) num ponto não umbílico.

(d) Mostre o seguinte teorema de *rigidez da esfera*: Uma superfície regular compacta e conexa de $\mathbb{R}^3$ com curvatura de Gauss K constante positiva é uma esfera redonda. OBS: O *teorema de Bonnet* generaliza o resultado acima. permitindo substituir a palavra “compacta” acima por “completa”.

(e) Mostre que existe um *sistema de coordenadas principais* numa vizinhança de p. *Sugestão*: Basta mostrar que existem campos $Y_1 = f\, X_1$ e $Y_2 = g\, X_2$; tais que $[Y_1, Y_2] = 0$.