LISTA 7 DE GEOMETRIA DIFERENCIAL 2007

RICARDO SA EARP

Vamos continuar o nosso estudo sobre superfícies de $\mathbb{R}^3$. Vamos explorar certas superfícies especiais, tais como superfícies mínimas, superfícies de curvatura média constante. Vamos explorar e aplicar conceitos importantes tais como equações das geodésicas, fluxo, fórmula do fluxo, princípio do máximo, dentre outros. Você deve fazer um paralelo comparativo com as superfícies de $\mathbb{H}^3$ para entender os conceitos, as fórmulas, os resultados que continuam válidos quando o ambiente é o espaço hiperbólico.

Primeiramente vamos fazer uma incursão pelas superfícies de $\mathbb{R}^3$, tomando *parâmetros isotérmicos*, obtendo com esta ajuda alguns conceitos, fórmulas e resultados fundamentais da geometria das imersões . Considere S uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$. Considere $z = u + iv$ coordenadas isotérmicas locais em uma vizinhança de um ponto $p \in S$; isto é, $E = G$ e $F = 0$, onde E, F, G, são os coeficientes da primeira forma fundamental, relativos a uma parametrização conforme $X(z)$. Vamos denotar também $E = \lambda^2$. Sejam l, m, n, os coeficientes da segunda forma fundamental (Na notação proposta em sala de aula $e = l, f = m, g = n$). Vamos denotar $\{X_1, X_2\}$ o referencial local adaptado à X em p. Usaremos também a notação X_u para designar X_1 e X_v para designar X_2.

(1) O gradiente, a divergência e o Laplaciano. Seja $f : S \to \mathbb{R}$ uma função real suave definida em S. Define-se o *gradiente* de f, denotado por ∇f como sendo o campo de vetores tangentes à S satisfazendo

$$\nabla f \cdot v = df_p(v)$$

onde v é tangente à S em p, isto é $v \in T_pS$.

(2) Mostre que

$$\nabla f = \frac{f_u}{E} X_u + \frac{f_v}{E} X_v$$

onde cometemos o abuso de notação usual identificando $f(u, v)$ com $f \circ X(u, v)$.

(3) Define-se a *divergência* de um campo Y de vetores tangentes à S (i. e $Y(p) \in T_pS$), denotada por div, como sendo o traço da

aplicação $Z \to D_Z Y$, onde Z é um campo de vetores tangentes à S, e D é a conexão Riemanniana de S. Ou seja,

$$\operatorname{div} Y = \operatorname{tr}(Z \to D_Z Y)$$

(4) Mostre

$$\operatorname{div} Y = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial}{\partial u}(Y \cdot X_u) + \frac{\partial}{\partial v}(Y \cdot X_v)\right)$$

(5) Define-se o *Laplaciano* de uma função real suave f definida em S , denotado por $\triangle f$, como sendo

$$\triangle f = \operatorname{div} \nabla f$$

(6) Mostre

$$\triangle f(p) = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial v^2}\right)$$

onde cometemos o abuso de notação identificando $f(u,v)$ com $f \circ X(u,v)$.

(7) Mostre que os conceitos de gradiente, divergência e Laplaciano pertence à *geometria intrínseca das superfícies*, ou seja dependem apenas da primeira forma fundamental e podem por isto ser definidos numa superfície Riemanniana qualquer. Assim o Laplaciano definido acima é também chamado de *Laplaciano Riemanniano*.

(8) Consideremos S munida de sua estrutura de superfície de Riemann (induzida pela métrica de S). Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função real suave. o *Laplaciano conforme relativo à coordenada conforme* z está definido como

$$\triangle_z f = f_{uu} + f_{vv}$$

(9) Mostre que a definição de Laplaciano conforme depende da coordenada isotérmica z, uma função mas a noção de f ser harmônica na superfície de Riemann não depende. Além disso mostre que esta noção de harmonicidade é a mesma considerando o Laplaciano Riemanniano definido no item anterior.

Um importante teorema da Geometria é o *teorema da divergência*: Seja S uma superfície Riemanniana suave e seja Y um campo suave de vetores tangentes à S. O teorema da divergência (intrínseco) diz o seguinte

$$\int_S \operatorname{div} Y \,\mathrm{d}A = -\int_{\partial S} Y \cdot \eta \,\mathrm{d}s$$

onde $\mathrm{d}A = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ é o elemento de área de S, ∂S é o bordo de S, $\mathrm{d}s$ é o elemento comprimento de arco de ∂S, e η é o vetor co-normal *interior* ao longo de ∂S (η é tangente à S, normal à ∂S, apontando para dentro de S).

(10) Considere X como sendo o vetor posição de uma superfície orientada S em $\mathbb{R}^3$, por um campo de vetores normais unitários N ao longo de S. Suponha que ∂S seja uma curva (regular) simples fechada γ contida no plano-xy, de modo que $\gamma = \partial D$ onde $D \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio de Jordan. Suponha que $S \cup D$ é um ciclo orientável, de modo que $S \cup D = \partial V$, onde V é um "sólido " de $\mathbb{R}^3$, e o teorema da divergência se aplica (Faça uma figura !). Seja $\triangle_{\mathbb{R}^3}$ o Laplaciano usual de $\mathbb{R}^3$. Mostre que

$$6\mathrm{vol}(V) + 2\int_S X \cdot N\,\mathrm{d}A = 0$$

Sugestão : Aplique corretamente o teorema da divergência (em $\mathbb{R}^3$) Mostre que

$$\triangle|X|^2 = 4 + 4HX \cdot N$$

(11) Aplique agora o teorema da divergência *em S* mostrando que

$$\int_S \triangle|X|^2\,\mathrm{d}A = -2\int_{\partial S} X \cdot \eta\,\mathrm{d}s$$

onde η é o co-normal interior ao longo do bordo de S.

(12) Levando em conta os resultados obtidos nos itens anteriores deduza que

$$4\,\text{área}(S) + 4H\int_S X \cdot N\,\mathrm{d}A = -2\int_{\partial S} X \cdot \eta\,\mathrm{d}s$$

(13) Juntando os resultados obtidos nos itens anteriores infira

$$2\,\text{área}(S) = 6H\mathrm{vol}(M) - \int_{\partial S} X \cdot \eta\,\mathrm{d}s$$

(14) (*Fluxo numa superfície mínima*). Suponha agora que S seja uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$, orientada por um campo de vetores normal unitário N ao longo de S. Seja ν o co-normal *exterior* ao longo de ∂S.

Seja W um campo de vetores suaves em $\mathbb{R}^3$. Considere a componente tangencial W^T de W, ou seja a projeção ortogonal de W no plano tangente à S. Mostre que

$$W^T = W - (W \cdot N)\,N$$

(15) Seja v um campo *constante* em $\mathbb{R}^3$. Mostre que v^T é o gradiente de uma função harmônica que é a restrição à S de uma função linear em $\mathbb{R}^3$. *Sugestão* : Você vai precisar do fato que as coordenadas dos pontos de uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$ em parâmetros isotérmicos são funções harmônicas: Veja logo adiante. Mostre ainda que segue do teorema da divergência a seguinte equação vetorial

$$\int_{\partial S} \nu \, \mathrm{d}s = 0$$

Conclua que para curvas fechadas γ, tem-se que $\int_\gamma \nu \, \mathrm{d}s$, é um invariante de homologia.

O fluxo ao longo de γ está definido pela quantidade

$$\mathrm{Fluxo}([\gamma]) := \int_\gamma \nu \, \mathrm{d}s$$

- Considere uma superfície de revolução com eixo z e curva geradora C contida no plano yz, parametrizada por $(r(t), t), t \in I \subset \mathbb{R}$. Considere a porção da superfície entre os planos horizontais $z = t_1, z = t_2$, cujo bordo consiste de dois círculos horizontais de raios $r(t_1)$ e $r(t_2)$, respectivamente. Seja $\nu = (0, 0, 1)$ o vetor vertical canônico. Calcule o *fluxo vertical* e obtenha a seguinte equação diferencial $r(t)\dfrac{1}{\sqrt{1 + r'^2}} = \mathrm{cte}$. Conclua que a superfície é um catenóide.

Nota: Lembremos que a curvatura de Gauss K de uma superfície mínima S é sempre não positiva. A curvatura total denotada por $C(S)$ está definida por

$$C(S) := \int_S K \, \mathrm{d}A$$

Um resultado interessante é o seguinte: Se uma superfície mínima completa mergulhada de curvatura total finita em $\mathbb{R}^3$, tem *fluxo vertical* (i. e o fluxo, $\mathrm{Fluxo}([\gamma])$, é um vetor vertical para toda curva fechada $\gamma \subset S$), então S é o plano o catenóide. Nota: A curvatura total pode ser interpretada como a imagem esférica da aplicação normal de Gauss. De modo que quando a curvatura total é finita vale a seguinte fórmula:

$$C(S) = -4\pi n$$

onde n é o grau da aplicação normal de Gauss. Quando a curvatura total é finita segue de um teorema de Huber que S é conformemente equivalente a uma superfície de Riemann compacta $\overline{S}$ de gênero g, removido um conjunto finito de pontos, chamados *puncture*. Os dados meromorfos $(g, f\,\mathrm{d}z)$ se estendem meromorficamente à $\overline{S}$ (*Teorema de Osserman*).

Vamos em seguida abordar a famosa *representação de Weierstrass* das superfícies mínimas.

(16) Seja S o catenóide
   (a) Mostre que a única geodésica fechada de S é o paralelo contido no plano de simetria de S.
   (b) Mostre por um argumento simples e direto que S não tem pontos umbílicos, mas que S é assimptoticamente umbílica, i. e $k_1(p) - k_2(p) \to 0$, quando $|p| \to \infty$, onde k_1, k_2 são as curvaturas principais de S.
   (c) Aplique o teorema de Gauss-Bonnet e estude o comportamento assimptótico numa metade do catenóide (cortado ao longo da geodésica representante da classe de homologia do fim que minimiza o comprimento de arco), para mostrar que a curvatura total do catenóide é -4π. Nota: Como já comentamos, a curvatura total de uma superfície mínima de curvatura total finita é $-4\pi n$, sendo n o grau da aplicação normal de Gauss. No caso do catenóide é imediato verificar que $n = 1$.
   (d) Vamos voltar ao importante conceito de *fluxo*, definido na lista anterior. Aplicando o conceito do fluxo para superfícies mínimas, mostre que o catenóide é a única superfície mínima de revolução

(17) Um teorema devido a Klotz e Osserman diz que *uma superfície completa em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média H constante, cuja curvatura de Gauss K não muda de sinal é uma superfície mínima, ou a esfera, ou o cilindro circular reto.* Vamos estudar este resultado.
   (a) Suponha que $K \leqslant 0$ (e H =constante $\neq 0$). Escolha parâmetros isotérmicos $z = u + iv$. Seja $\mathrm{d}s^2 = E|\,\mathrm{d}z|^2$, a métrica de S (em parâmetros isotérmicos). Considere a *função de Hopf*

$$\phi = \frac{l - n}{2} - im$$

   definida na lista anterior, onde l, m, n são os coeficientes da segunda forma fundamental (em parâmetros isotérmicos). Lembre-se que já sabemos que ϕ é holomorfa, pelo fato de que H =constante. Mostre que

$$|\phi|^2 = E^2(H^2 - K) > 0$$

Conclua que

(b) A nova métrica $d\widetilde{s}^2 := E\sqrt{H^2 - K}\,|\,dz|^2$, é *completa* e conforme à métrica antiga $d\,s^2$, de modo que o recobrimento conforme simplesmente conexo de ambas as superfícies de Riemann é a mesma superfície de Riemann simplesmente conexa (veja ref. 20).

(c) Mostre que a nova métrica é plana ("flat"), ou seja tem curvatura de Gauss $\widetilde{K}$ identicamente nula. Ou equivalentemente, $\log\widetilde{\lambda}$, onde $\widetilde{\lambda}^2 = E\sqrt{H^2 - K}$, é uma função harmônica.
Segue de um argumento standard da geometria conforme (veja ref. 14) ou do clássico teorema de Cartan da geometria Riemanniana, que o recobrimento simplesmente conexo de S é conformemente equivalente ao plano complexo $\mathbb{C}$ (Você saberia demonstrar isto ?)

(d) Mostre que a função $-\log\left(\dfrac{\widetilde{\lambda}^2}{E}\right)$ está globalmente definida em S, e é uma função subharmônica limitada superiormente. Levantando $-\log\left(\dfrac{\widetilde{\lambda}^2}{E}\right)$ ao recobrimento universal $\widetilde{S}$, conformemente equivalente à $\mathbb{C}$, obtemos pelo teorema de Liouville (veja ref. 15) que $-\log\left(\dfrac{\widetilde{\lambda}^2}{E}\right)$ deve ser constante. Conclua que K deve ser também constante, donde zero, ainda devido ao fato que $\widetilde{S}$, conformemente equivalente à $\mathbb{C}$. Agora é um resultado clássico da geometria diferencial que S deve ser o cilindro circular reto: Este teorema diz que *uma superfície completa de curvatura de Gauss identicamente nula diferente do plano, é um cilindro generalizado* (veja ref. 4). Logo, se além disso, possui curvatura média constante (não nula), é necessariamente o cilindro circular reto.

(e) Suponha agora que $K \geqslant 0$ (e H =constante $\neq 0$). Por um bem conhecido teorema de Huber , uma superfície completa com $K \geqslant 0$ é ou bem compacta ou bem parabólica.

(f) Mostre que se S é compacta segue do teorema de Gauss-Bonnet que S tem genus zero, e assim pelo teorema de Hopf (que demonstramos na lista anterior, veja também ref. 10) segue que S é uma esfera.

(g) Suponha S parabólica. Você será guiado para mostrar que neste caso S deve ser flat ($K \equiv 0$). Note que $\widetilde{\lambda}^4 = E^2(H^2 - K)$, não pode se anular identicamente, já que em caso contrário $K \equiv H^2$, e assim S admitiria uma métrica completa de curvatura de Gauss constante positiva, o que é impossível desde que S é parabólica. Justifique esta dedução de várias outras maneiras ! Note que pela mesma razão de antes $\log \widetilde{\lambda}$, é harmônica. Mostre agora que $\log\left(\frac{\widetilde{\lambda}^2}{E}\right)$ é uma função subharmônica limitada superiormente. Conclua como antes que K é constante. Logo $K \equiv 0$, já que S é parabólica. Com isto a verificação do teorema está terminada.

(18) Seja S uma superfície mínima simplesmente conexa em $\mathbb{R}^3$ e $z = u + iv$ parâmetros isotérmicos. Vamos obter "meromorphic data" $(g, f\,\mathrm{d}z)$ que determinam a imersão mínima $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2$. Seja

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) := X_u - iX_v$$

(a) Mostre que $z = u + iv$ são parâmetros isotérmicos, sse $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = 0$.

(b) Mostre que X é harmônica, sse Φ é holomorfa.

(c) Mostre que X é regular e $z = u + iv$ são parâmetros isotérmicos (ou seja $E \neq 0$), sse $\sum |\Phi_j|^2 \neq 0$ e $z = u + iv$ são parâmetros isotérmicos.

(d) Mostre que

$$X(z) = \Re \int_{z_0}^{z} \Phi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

(e) Mostre que se X não é *plana* então $\Phi_1 \not\equiv i\Phi_2$, e $\Phi_3 \not\equiv 0$. Neste caso, existe uma função holomorfa $2f := \Phi_1 - i\Phi_2$ em U e uma função meromorfa $g := \dfrac{\Phi_3}{\Phi_1 - i\Phi_2}$, de maneira que podemos escrever (fazendo um abuso de notação) a *representação de Weierstrass*

$$X(z) = \Re \int_{z_0}^{z} \left((1 - g^2)f\,\mathrm{d}z, i(1 + g^2)f\,\mathrm{d}z, 2gf\,\mathrm{d}z\right)$$

Mostre que a superfície será regular sse f se anula *apenas* nos pólos de g e a ordem de cada zero nestes pontos é exatamente o dobro da ordem do pólo de g.

(f) Mostre que a métrica é dada por

$$\mathrm{d}s^2 = \big(|f|(1+|g|^2)\big)^2\,|\,\mathrm{d}z|^2$$

(g) Mostre que a segunda forma fundamental II é dada por

$$II = -2\Re(f\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}g)$$

(h) A finalidade deste exercício é mostrar que g é exatamente a composta da aplicação normal de Gauss com a projeção estereográfica do *pólo norte*, que tem que ser conforme, sse S é mínima (por quê ?).

(i) Mostre que

$$X_u \times X_v = \big(\Im(\overline{\Phi_3}\Phi_2), \Im(\overline{\Phi_1}\Phi_3), \Im(\overline{\Phi_2}\Phi_1)\big)$$

Conclua

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \left(\frac{2\Re g}{1+|g|^2}, \frac{2\Im g}{1+|g|^2}, \frac{1-|g|^2}{1+|g|^2}\right)$$

Infira daí o desejado.

(j) Mostre que a curvatura de Gauss K de uma superfície mínima pode ser expressa em termos de f, g

$$K = -\left(\frac{2|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2}\right)^2$$

(k) Vamos neste item re-obter superfícies mínimas clássicas via a representação de Weierstrass

(l) Mostre que o catenóide pode ser obtido fazendo $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$,
$g(z) = z, f(z)\,\mathrm{d}z = \dfrac{\mathrm{d}z}{z^2}$.

(m) Mostre que o helicóide pode ser obtido fazendo $U = \mathbb{C}, g(z) = \mathrm{e}^z$,
$f(z)\,\mathrm{d}z = i\,\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z$.

(n) Mostre que Enneper pode ser obtida fazendo $U = \mathbb{C}, g(z) = z$,
$f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}z$. Nota: O catenóide é a única superfície mínima de revolução . O catenóide e a superfície de Enneper são as únicas superfícies mínimas completas de curvatura total -4π. Se uma superfície mínima S mergulhada e completa tem curvatura total finita e gênero zero, então

S tem que ser o plano ou o catenóide (*Teorema de Lopez-Ros*). Se uma superfície mínima S mergulhada e completa tem curvatura total finita e dois fins, então S tem que ser o catenóide (*Teorema de R. Schoen*): A hipótese de curvatura total finita pode ser relaxada e substituída pela hipótese bem mais fraca de *topologia finita* (*Teorema de P. Collin*).

(o) Obtenha a representação de Weierstrass da família catenóide-helicóide de superfícies mínimas associadas, localmente isométricas, ao catenóide (helicóide).

(p) Vamos ver outros exemplos de superfícies mínimas

(q) A superfície de Scherk é dada implicitamente por

$$e^z = \frac{\cos y}{\cos x}$$

Estude o seu gráfico.
Scherk foi obtida pelo método de separação das variáveis.
A equação não paramétrica da superfície mínima de $\mathbb{R}^3$ é a seguinte:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{W(u)}\right) = 0$$

Obtenha Scherk procurando soluções da equação não paramétrica da superfície mínima de $\mathbb{R}^3$ da forma $z = u(x, y) := F(x) + G(y)$.

(r) Considere $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}, g(z) = e^{\frac{1}{z}}, f(z)\,dz = \dfrac{dz}{z^2\, e^{\frac{1}{z}}}$. Calcule Φ_1, Φ_2, Φ_3. Mostre que a condição de zeros e pólos de f, g estão satisfeitas. Para que a imersão esteja bem definida é necessário verificar as *condições de período*: Basta considerar uma curva de Jordan em torno de 0 e calcular os resíduos de Φ_1, Φ_2, Φ_3 na singularidade 0, e mostrar que parte real do resíduo é real. Conclua que $(g, f\,dz)$ define uma imersão conforme mínima de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ em $\mathbb{R}^3$. Mostre que a imersão é completa e de curvatura total $-\infty$. *Sugestão* : Para mostrar o último ponto você terá que usar o grande teorema de Picard.