

LISTA 7 DE GEOMETRIA DIFERENCIAL 2007

RICARDO SA EARP

Vamos continuar o nosso estudo sobre superfícies de \mathbb{R}^3 . Vamos explorar certas superfícies especiais, tais como superfícies mínimas, superfícies de curvatura média constante. Vamos explorar e aplicar conceitos importantes tais como equações das geodésicas, fluxo, fórmula do fluxo, princípio do máximo, dentre outros. Você deve fazer um paralelo comparativo com as superfícies de \mathbb{H}^3 para entender os conceitos, as fórmulas, os resultados que continuam válidos quando o ambiente é o espaço hiperbólico.

Primeiramente vamos fazer uma incursão pelas superfícies de \mathbb{R}^3 , tomando *parâmetros isotérmicos*, obtendo com esta ajuda alguns conceitos, fórmulas e resultados fundamentais da geometria das imersões. Considere S uma superfície imersa em \mathbb{R}^3 . Considere $z = u + iv$ coordenadas isotérmicas locais em uma vizinhança de um ponto $p \in S$; isto é, $E = G$ e $F = 0$, onde E, F, G , são os coeficientes da primeira forma fundamental, relativos a uma parametrização conforme $X(z)$. Vamos denotar também $E = \lambda^2$. Sejam l, m, n , os coeficientes da segunda forma fundamental (Na notação proposta em sala de aula $e = l, f = m, g = n$). Vamos denotar $\{X_1, X_2\}$ o referencial local adaptado à X em p . Usaremos também a notação X_u para designar X_1 e X_v para designar X_2 .

- (1) O gradiente, a divergência e o Laplaciano. Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real suave definida em S . Define-se o *gradiente* de f , denotado por ∇f como sendo o campo de vetores tangentes à S satisfazendo

$$\nabla f \cdot v = df_p(v)$$

onde v é tangente à S em p , isto é $v \in T_p S$.

- (2) Mostre que

$$\nabla f = \frac{f_u}{E} X_u + \frac{f_v}{E} X_v$$

onde cometemos o abuso de notação usual identificando $f(u, v)$ com $f \circ X(u, v)$.

- (3) Define-se a *divergência* de um campo Y de vetores tangentes à S (i. e. $Y(p) \in T_p S$), denotada por div , como sendo o traço da

aplicação $Z \rightarrow D_Z Y$, onde Z é um campo de vetores tangentes à S , e D é a conexão Riemanniana de S . Ou seja,

$$\operatorname{div} Y = \operatorname{tr} (Z \rightarrow D_Z Y)$$

(4) Mostre

$$\operatorname{div} Y = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial}{\partial u} (Y \cdot X_u) + \frac{\partial}{\partial v} (Y \cdot X_v) \right)$$

(5) Defina-se o *Laplaciano* de uma função real suave f definida em S , denotado por Δf , como sendo

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f$$

(6) Mostre

$$\Delta f(p) = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial v^2} \right)$$

onde cometemos o abuso de notação identificando $f(u, v)$ com $f \circ X(u, v)$.

(7) Mostre que os conceitos de gradiente, divergência e Laplaciano pertence à *geometria intrínseca das superfícies*, ou seja dependem apenas da primeira forma fundamental e podem por isto ser definidos numa superfície Riemanniana qualquer. Assim o Laplaciano definido acima é também chamado de *Laplaciano Riemanniano*.

(8) Consideremos S munida de sua estrutura de superfície de Riemann (induzida pela métrica de S). Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real suave. o *Laplaciano conforme relativo à coordenada conforme z* está definido como

$$\Delta_z f = f_{uu} + f_{vv}$$

(9) Mostre que a definição de Laplaciano conforme depende da coordenada isotérmica z , uma função mas a noção de f ser harmônica na superfície de Riemann não depende. Além disso mostre que esta noção de harmonicidade é a mesma considerando o Laplaciano Riemanniano definido no item anterior.

Um importante teorema da Geometria é o *teorema da divergência*: Seja S uma superfície Riemanniana suave e seja Y um campo suave de vetores tangentes à S . O teorema da divergência (intrínseco) diz o seguinte

$$\int_S \operatorname{div} Y \, dA = - \int_{\partial S} Y \cdot \eta \, ds$$

onde $dA = \sqrt{EG - F^2} du dv$ é o elemento de área de S , ∂S é o bordo de S , ds é o elemento comprimento de arco de ∂S , e η é o vetor co-normal *interior* ao longo de ∂S (η é tangente à S , normal à ∂S , apontando para dentro de S).

- (10) Considere X como sendo o vetor posição de uma superfície orientada S em \mathbb{R}^3 , por um campo de vetores normais unitários N ao longo de S . Suponha que ∂S seja uma curva (regular) simples fechada γ contida no plano- xy , de modo que $\gamma = \partial D$ onde $D \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio de Jordan. Suponha que $S \cup D$ é um ciclo orientável, de modo que $S \cup D = \partial V$, onde V é um “sólido” de \mathbb{R}^3 , e o teorema da divergência se aplica (Faça uma figura!). Seja $\Delta_{\mathbb{R}^3}$ o Laplaciano usual de \mathbb{R}^3 . Mostre que

$$6\text{vol}(V) + 2 \int_S X \cdot N dA = 0$$

Sugestão : Aplique corretamente o teorema da divergência (em \mathbb{R}^3) Mostre que

$$\Delta|X|^2 = 4 + 4HX \cdot N$$

- (11) Aplique agora o teorema da divergência *em* S mostrando que

$$\int_S \Delta|X|^2 dA = -2 \int_{\partial S} X \cdot \eta ds$$

onde η é o co-normal interior ao longo do bordo de S .

- (12) Levando em conta os resultados obtidos nos itens anteriores deduza que

$$4 \text{área}(S) + 4H \int_S X \cdot N dA = -2 \int_{\partial S} X \cdot \eta ds$$

- (13) Juntando os resultados obtidos nos itens anteriores infira

$$2 \text{área}(S) = 6H\text{vol}(M) - \int_{\partial S} X \cdot \eta ds$$

- (14) (*Fluxo numa superfície mínima*). Suponha agora que S seja uma superfície mínima em \mathbb{R}^3 , orientada por um campo de vetores normal unitário N ao longo de S . Seja ν o co-normal *exterior* ao longo de ∂S .

Seja W um campo de vetores suaves em \mathbb{R}^3 . Considere a componente tangencial W^T de W , ou seja a projeção ortogonal de W no plano tangente à S . Mostre que

$$W^T = W - (W \cdot N) N$$

- (15) Seja v um campo *constante* em \mathbb{R}^3 . Mostre que v^T é o gradiente de uma função harmônica que é a restrição à S de uma função linear em \mathbb{R}^3 . *Sugestão* : Você vai precisar do fato que as coordenadas dos pontos de uma superfície mínima em \mathbb{R}^3 em parâmetros isotérmicos são funções harmônicas: Veja logo adiante. Mostre ainda que segue do teorema da divergência a seguinte equação vetorial

$$\int_{\partial S} \nu \, ds = 0$$

Conclua que para curvas fechadas γ , tem-se que $\int_{\gamma} \nu \, ds$, é um invariante de homologia.

O *fluxo ao longo de γ* está definido pela quantidade

$$\text{Fluxo}([\gamma]) := \int_{\gamma} \nu \, ds$$

- Considere uma superfície de revolução com eixo z e curva geradora C contida no plano yz , parametrizada por $(r(t), t), t \in I \subset \mathbb{R}$. Considere a porção da superfície entre os planos horizontais $z = t_1, z = t_2$, cujo bordo consiste de dois círculos horizontais de raios $r(t_1)$ e $r(t_2)$, respectivamente. Seja $\nu = (0, 0, 1)$ o vetor vertical canônico. Calcule o *fluxo vertical* e obtenha a seguinte equação diferencial $r(t) \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} = \text{cte}$. Conclua que a superfície é um catenóide.

Nota: Lembremos que a curvatura de Gauss K de uma superfície mínima S é sempre não positiva. A curvatura total denotada por $C(S)$ está definida por

$$C(S) := \int_S K \, dA$$

Um resultado interessante é o seguinte: Se uma superfície mínima completa mergulhada de curvatura total finita em \mathbb{R}^3 , tem *fluxo vertical* (i. e o fluxo, $\text{Fluxo}([\gamma])$, é um vetor vertical para toda curva fechada $\gamma \subset S$), então S é o plano ou o catenóide. Nota: A curvatura total pode ser interpretada como a imagem esférica da aplicação normal de Gauss. De modo que quando a curvatura total é finita vale a seguinte fórmula:

$$C(S) = -4\pi n$$

onde n é o grau da aplicação normal de Gauss. Quando a curvatura total é finita segue de um teorema de Huber que S é

conformemente equivalente a uma superfície de Riemann compacta \bar{S} de gênero g , removido um conjunto finito de pontos, chamados *puncture*. Os dados meromorfos $(g, f dz)$ se estendem meromorficamente à \bar{S} (*Teorema de Osserman*).

Vamos em seguida abordar a famosa *representação de Weierstrass* das superfícies mínimas.

- (16) Seja S o catenóide
- Mostre que a única geodésica fechada de S é o paralelo contido no plano de simetria de S .
 - Mostre por um argumento simples e direto que S não tem pontos umbílicos, mas que S é assintoticamente umbílica, i. e. $k_1(p) - k_2(p) \rightarrow 0$, quando $|p| \rightarrow \infty$, onde k_1, k_2 são as curvaturas principais de S .
 - Aplique o teorema de Gauss-Bonnet e estude o comportamento assintótico numa metade do catenóide (cortado ao longo da geodésica representante da classe de homologia do fim que minimiza o comprimento de arco), para mostrar que a curvatura total do catenóide é -4π . Nota: Como já comentamos, a curvatura total de uma superfície mínima de curvatura total finita é $-4\pi n$, sendo n o grau da aplicação normal de Gauss. No caso do catenóide é imediato verificar que $n = 1$.
 - Vamos voltar ao importante conceito de *fluxo*, definido na lista anterior. Aplicando o conceito do fluxo para superfícies mínimas, mostre que o catenóide é a única superfície mínima de revolução
- (17) Um teorema devido a Klotz e Osserman diz que *uma superfície completa em \mathbb{R}^3 com curvatura média H constante, cuja curvatura de Gauss K não muda de sinal é uma superfície mínima, ou a esfera, ou o cilindro circular reto*. Vamos estudar este resultado.
- Suponha que $K \leq 0$ (e $H = \text{constante} \neq 0$). Escolha parâmetros isotérmicos $z = u + iv$. Seja $ds^2 = E|dz|^2$, a métrica de S (em parâmetros isotérmicos). Considere a *função de Hopf*

$$\phi = \frac{l - n}{2} - im$$

definida na lista anterior, onde l, m, n são os coeficientes da segunda forma fundamental (em parâmetros isotérmicos). Lembre-se que já sabemos que ϕ é holomorfa, pelo fato de

que $H = \text{constante}$. Mostre que

$$|\phi|^2 = E^2(H^2 - K) > 0$$

Conclua que

- (b) A nova métrica $d\tilde{s}^2 := E\sqrt{H^2 - K}|dz|^2$, é *completa* e conforme à métrica antiga ds^2 , de modo que o recobrimento conforme simplesmente conexo de ambas as superfícies de Riemann é a mesma superfície de Riemann simplesmente conexa (veja ref. 20).
- (c) Mostre que a nova métrica é plana (“flat”), ou seja tem curvatura de Gauss \tilde{K} identicamente nula. Ou equivalentemente, $\log \tilde{\lambda}$, onde $\tilde{\lambda}^2 = E\sqrt{H^2 - K}$, é uma função harmônica. Segue de um argumento standard da geometria conforme (veja ref. 14) ou do clássico teorema de Cartan da geometria Riemanniana, que o recobrimento simplesmente conexo de S é conformemente equivalente ao plano complexo \mathbb{C} (Você saberia demonstrar isto ?)
- (d) Mostre que a função $-\log\left(\frac{\tilde{\lambda}^2}{E}\right)$ está globalmente definida em S , e é uma função subharmônica limitada superiormente. Levantando $-\log\left(\frac{\tilde{\lambda}^2}{E}\right)$ ao recobrimento universal \tilde{S} , conformemente equivalente à \mathbb{C} , obtemos pelo teorema de Liouville (veja ref. 15) que $-\log\left(\frac{\tilde{\lambda}^2}{E}\right)$ deve ser constante. Conclua que K deve ser também constante, donde zero, ainda devido ao fato que \tilde{S} , conformemente equivalente à \mathbb{C} . Agora é um resultado clássico da geometria diferencial que S deve ser o cilindro circular reto: Este teorema diz que *uma superfície completa de curvatura de Gauss identicamente nula diferente do plano, é um cilindro generalizado* (veja ref. 4). Logo, se além disso, possui curvatura média constante (não nula), é necessariamente o cilindro circular reto.
- (e) Suponha agora que $K \geq 0$ (e $H = \text{constante} \neq 0$). Por um bem conhecido teorema de Huber , uma superfície completa com $K \geq 0$ é ou bem compacta ou bem parabólica.
- (f) Mostre que se S é compacta segue do teorema de Gauss-Bonnet que S tem genus zero, e assim pelo teorema de Hopf

(que demonstramos na lista anterior, veja também ref. 10) segue que S é uma esfera.

- (g) Suponha S parabólica. Você será guiado para mostrar que neste caso S deve ser flat ($K \equiv 0$). Note que $\tilde{\lambda}^4 = E^2(H^2 - K)$, não pode se anular identicamente, já que em caso contrário $K \equiv H^2$, e assim S admitiria uma métrica completa de curvatura de Gauss constante positiva, o que é impossível desde que S é parabólica. Justifique esta dedução de várias outras maneiras ! Note que pela mesma razão de antes $\log \tilde{\lambda}$, é harmônica. Mostre agora que $\log \left(\frac{\tilde{\lambda}^2}{E} \right)$ é uma função subharmônica limitada superiormente. Conclua como antes que K é constante. Logo $K \equiv 0$, já que S é parabólica. Com isto a verificação do teorema está terminada.

- (18) Seja S uma superfície mínima simplesmente conexa em \mathbb{R}^3 e $z = u + iv$ parâmetros isotérmicos. Vamos obter “meromorphic data” $(g, f dz)$ que determinam a imersão mínima $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto simplesmente conexo de \mathbb{R}^2 . Seja

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) := X_u - iX_v$$

- (a) Mostre que $z = u + iv$ são parâmetros isotérmicos, sse $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = 0$.
 (b) Mostre que X é harmônica, sse Φ é holomorfa.
 (c) Mostre que X é regular e $z = u + iv$ são parâmetros isotérmicos (ou seja $E \neq 0$), sse $\sum |\Phi_j|^2 \neq 0$ e $z = u + iv$ são parâmetros isotérmicos.
 (d) Mostre que

$$X(z) = \Re \int_{z_0}^z \Phi(\zeta) d\zeta$$

- (e) Mostre que se X não é *plana* então $\Phi_1 \not\equiv i\Phi_2$, e $\Phi_3 \not\equiv 0$. Neste caso, existe uma função holomorfa $2f := \Phi_1 - i\Phi_2$ em U e uma função meromorfa $g := \frac{\Phi_3}{\Phi_1 - i\Phi_2}$, de maneira que podemos escrever (fazendo um abuso de notação) a *representação de Weierstrass*

$$X(z) = \Re \int_{z_0}^z ((1 - g^2)f dz, i(1 + g^2)f dz, 2gf dz)$$

Mostre que a superfície será regular sse f se anula apenas nos pólos de g e a ordem de cada zero nestes pontos é exatamente o dobro da ordem do pólo de g .

(f) Mostre que a métrica é dada por

$$ds^2 = (|f|(1 + |g|^2))^2 |dz|^2$$

(g) Mostre que a segunda forma fundamental II é dada por

$$II = -2\Re(f dz dg)$$

(h) A finalidade deste exercício é mostrar que g é exatamente a composta da aplicação normal de Gauss com a projeção estereográfica do pólo norte, que tem que ser conforme, sse S é mínima (por quê?).

(i) Mostre que

$$X_u \times X_v = (\Im(\overline{\Phi_3}\Phi_2), \Im(\overline{\Phi_1}\Phi_3), \Im(\overline{\Phi_2}\Phi_1))$$

Conclua

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \left(\frac{2\Re g}{1 + |g|^2}, \frac{2\Im g}{1 + |g|^2}, \frac{1 - |g|^2}{1 + |g|^2} \right)$$

Infira daí o desejado.

(j) Mostre que a curvatura de Gauss K de uma superfície mínima pode ser expressa em termos de f, g

$$K = - \left(\frac{2|g'|}{|f|(1 + |g|^2)^2} \right)^2$$

(k) Vamos neste item re-obter superfícies mínimas clássicas via a representação de Weierstrass

(l) Mostre que o catenóide pode ser obtido fazendo $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$g(z) = z, f(z) dz = \frac{dz}{z^2}.$$

(m) Mostre que o helicóide pode ser obtido fazendo $U = \mathbb{C}, g(z) = e^z$,

$$f(z) dz = i e^{-z} dz.$$

(n) Mostre que Enneper pode ser obtida fazendo $U = \mathbb{C}, g(z) = z$,

$f(z) dz = dz$. Nota: O catenóide é a única superfície mínima de revolução. O catenóide e a superfície de Enneper são as únicas superfícies mínimas completas de curvatura total -4π . Se uma superfície mínima S mergulhada e completa tem curvatura total finita e gênero zero, então

S tem que ser o plano ou o catenóide (*Teorema de Lopez-Ros*). Se uma superfície mínima S mergulhada e completa tem curvatura total finita e dois fins, então S tem que ser o catenóide (*Teorema de R. Schoen*): A hipótese de curvatura total finita pode ser relaxada e substituída pela hipótese bem mais fraca de *topologia finita* (*Teorema de P. Collin*).

- (o) Obtenha a representação de Weierstrass da família catenóide-helicóide de superfícies mínimas associadas, localmente isométricas, ao catenóide (helicóide).
- (p) Vamos ver outros exemplos de superfícies mínimas
- (q) A superfície de Scherk é dada implicitamente por

$$e^z = \frac{\cos y}{\cos x}$$

Estude o seu gráfico.

Scherk foi obtida pelo método de separação das variáveis. A equação não paramétrica da superfície mínima de \mathbb{R}^3 é a seguinte:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{W(u)} \right) = 0$$

Obtenha Scherk procurando soluções da equação não paramétrica da superfície mínima de \mathbb{R}^3 da forma $z = u(x, y) := F(x) + G(y)$.

- (r) Considere $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $g(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $f(z) dz = \frac{dz}{z^2 e^{\frac{1}{z}}}$. Calcule Φ_1, Φ_2, Φ_3 . Mostre que a condição de zeros e pólos de f, g estão satisfeitas. Para que a imersão esteja bem definida é necessário verificar as *condições de período*: Basta considerar uma curva de Jordan em torno de 0 e calcular os resíduos de Φ_1, Φ_2, Φ_3 na singularidade 0, e mostrar que parte real do resíduo é real. Conclua que $(g, f dz)$ define uma imersão conforme mínima de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ em \mathbb{R}^3 . Mostre que a imersão é completa e de curvatura total $-\infty$. *Sugestão* : Para mostrar o último ponto você terá que usar o grande teorema de Picard.