

PROVA 2 DE GEOMETRIA DIFERENCIAL 2007

PROFESSOR RICARDO SA EARP

ESCREVA CORRETAMENTE E CLARAMENTE TODOS OS DESENVOLVIMENTOS NA PROVA COM RIGOR LÓGICO E JUSTIFICATIVA.

Escolha 4 dentre as 5 questões abaixo.

Responda verdadeiro ou falso. Caso falso exiba um contra-exemplo. Caso verdadeiro escreva uma dedução sucinta e rigorosa.

- (1) Dados $p, q \in \mathbb{S}^2$ seja $\text{dist}_{\mathbb{S}^2}(q, p)$ a distância entre p, q (na métrica das esfera). Seja $C_r := \{q \in \mathbb{S}^2; \text{dist}_{\mathbb{S}^2}(q, p_0) = r\}$, o círculo de raio r e centro p_0 em \mathbb{S}^2 .
 - (a) Segue então que existe uma curva C na esfera que *minimiza* o comprimento de arco, dentre *todas* as curvas parametrizadas suaves regulares ligando p à q . Além disso, o traço desta curva é um arco de círculo de raio máximo contido em \mathbb{S}^2 .
 - (b) Segue então que o comprimento de C_r é proporcional ao *seno* de r .
- (2) Considere o plano \mathbb{C} com coordenadas (u, v) munido da métrica
$$ds^2 = \frac{1000}{(1 + u^2 + v^2)^2} (du^2 + dv^2)$$
 - (a) Segue então que (\mathbb{C}, ds^2) é uma variedade Riemannniana de dimensão 2 *completa*.
 - (b) Segue então que (\mathbb{C}, ds^2) é uma variedade Riemannniana de dimensão 2 com curvatura de Gauss K *constante*.
- (3) Dados duas geodésicas completas C_1 e C_2 de \mathbb{S}^2 existe uma *isometria positiva* de \mathbb{S}^2 levando C_1 em C_2 .
- (4) Considere o catenóide dado por $x = a \cosh v \cos u, y = a \cosh v \sin u, z = av; 0 < u < 2\pi, v \in \mathbb{R}$ (“catenóide menos um meridiano”). Considere o helicóide de \mathbb{R}^3 parametrizado por $x = a \sinh v \cos u, y = a \sinh v \sin u, z = au; 0 < u < 2\pi, v \in \mathbb{R}$ (“pedaço do helicóide entre as alturas $z = 0$, e $z = 2\pi a$ ”).
 - (a) Se uma subvariedade S de dimensão 2 de \mathbb{R}^3 contém uma reta L , então L é uma *geodésica* de S ; assim, as “retas geradoras” do helicóide são *geodésicas* do helicóide.

- (b) Segue que existe uma *isometria* (local) do catenóide no helicóide, que leva a curva geratriz (catenária) do catenóide numa reta. Logo, a catenária é uma *geodésica* do catenóide.
- (c) A isometria do item anterior se estende a uma isometria do *ambiente* \mathbb{R}^3 .

- (5) **(Questão opcional)** Considere o plano hiperbólico $\mathbb{H}^2 = \{z = x + iy, y > 0\}$ munido da métrica hiperbólica $ds^2 = \frac{1}{(\Im z)^2}(dx^2 + dy^2)$.

Dados $p, q \in \mathbb{H}^2$ seja $\text{dist}_{\mathbb{H}^2}(q, p)$ a distância entre p, q (na métrica hiperbólica). Seja $C_\rho := \{q \in \mathbb{H}^2; \text{dist}_{\mathbb{H}^2}(q, p_0) = \rho\}$, o círculo de raio ρ e centro p_0 em \mathbb{H}^2 .

- (a) Segue então que o comprimento de C_ρ cresce *exponencialmente* com ρ .
- (b) O plano hiperbólico \mathbb{H}^2 é uma variedade Riemanniana de dimensão 2 *completa*.