

PROVA 3 DE GEOMETRIA DIFERENCIAL 2007

PROFESSOR RICARDO SA EARP

ESCREVA CLARAMENTE TODOS OS DESENVOLVIMENTOS NA PROVA
COM RIGOR LÓGICO E JUSTIFICATIVA CORRETA.

Escolha 4 dentre as 5 questões abaixo.

Responda verdadeiro ou falso em cada afirmação feita nos itens abaixo.
Caso falso exiba um contra-exemplo. Caso verdadeiro escreva uma
dedução sucinta e rigorosa.

- (1) A curvatura de uma curva plana que não seja uma reta, contida numa superfície suave (conexa) $S \subset \mathbb{R}^3$ num ponto $p \in S$ é igual (a menos de sinal) à curvatura normal na direção tangente a curva em p .
- (2) Uma geodésica plana numa superfície suave (conexa) $S \subset \mathbb{R}^3$ que não seja uma reta é uma linha de curvatura (primeira afirmação do item)

Mas, uma reta contida em S é uma geodésica de S e não é necessariamente uma linha de curvatura de S (segunda afirmação do item).

- (3) Numa superfície de curvatura de Gauss $K < 0$ existem em cada ponto duas direções assintóticas (primeira afirmação do item). Nenhuma destas curvas assintóticas é uma reta, já que $K < 0$ (segunda afirmação do item).

Além disso, estas direções se cortam ortogonalmente (terceira afirmação do item).

- (4) Considere a família (isométrica) catenóide-helicóide, denotada \mathcal{F}_θ abaixo.

$$\mathcal{Z}_\theta = \cos \theta \cdot \mathcal{C}(u, v) + \sin \theta \cdot \mathcal{H}(u, v) \quad \theta \in [0, \pi/2]$$

onde $\mathcal{C}(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av)$ e
 $\mathcal{H}(u, v) = (-a \sinh v \sin u, a \sinh v \cos u, -av)$, $0 < u < 2\pi$, $-\infty < v < \infty$, são parametrizações (locais) do catenóide e do helicóide, respectivamente.

Segue então que as curvas coordenadas do helicóide são linhas assintóticas (primeira afirmação). Uma das curvas tem curvatura não nula e a curvatura de Gauss K do helicóide é constante ao longo desta curva assintótica (segunda afirmação).

Tais curvas são levadas pela isometria (local) em linhas assintóticas do catenóide (terceira afirmação).

Nenhuma das superfícies pertencentes à família \mathcal{F}_θ tem pontos umbílicos, i.e curvaturas principais iguais (quarta afirmação).

- (5) Seja uma superfície suave S , seja $p \in S$ e seja $T_p S$ o plano tangente a S em p . Seja N um normal unitário a S em p (existem duas escolhas possíveis de tal N). Considere a família de planos $T_\varepsilon := T_p S + \varepsilon N$, para $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno. A afirmação é a seguinte:

Quando curvatura de Gauss em p é estritamente positiva, i.e $K(p) > 0$, então existe uma escolha de $\varepsilon \neq 0$, tal que uma componente conexa de $T_\varepsilon \cap S$ é uma curva plana simples fechada e convexa (ou seja a curva fica de um lado da reta tangente em cada ponto).