LISTA 1 DE GEOMETRIA DIFERENCIAL 2008

PROFESSOR RICARDO SA EARP

Nesta lista é muito conveniente o uso do MAPLE para facilitar os cálculos, assim como para fazer os desenhos das curvas.

(1) Considere as curvas parametrizadas $\alpha(t) = (f(t), g(t))$, abaixo. Determine o domínio de definição. Verifique a regularidade da curva. Estudando a paridade e periodicidade das funções coordenadas $f(t)$ e $g(t)$ encontre os pontos de interseção da curva com os eixos coordenados. Verifique se a curva apresenta simetria em relação a estes eixos ou simetria em relação à origem, ou simetria com respeito a alguma reta. Verifique também se são invariantes por rotações ou por um grupo de rotações. Ache as expressões das retas verticais e horizontais que tangenciam estas curvas. Encontre os pontos múltiplos (pontos de auto-interseção). Analise o sinal da derivada de cada coordenada da curva (i.e sinal de f' e g') e estude a variação de f e g plotando o resultado num desenho. Estude as segundas derivadas e estude a concavidade da curva determinando os pontos de inflexão(caso existirem)– complete o *plot* esboçando o desenho da curva. Determine as cúspides, caso existirem (pontos singulares t_0 onde o limite $\lim\limits_{t\to t_0} g'(t)/f'(t)$ existe, podendo ser $\pm\infty$, ou seja nestes pontos, existe reta tangente limite).

(a) $\alpha(t) = (\sqrt{3}t^2, \sqrt{3}t - \frac{t^3}{3}),\ t \in \mathbb{R}$. Neste exemplo, exiba fórmulas explícitas mostrando que a curva é união de gráficos verticais ou horizontais. Encontre a equação da reta tangente no ponto $t = 1$ (i.e correspondente a $t = 1$.)

(b) $\alpha(t) = ((t^3 - t)e^{-t^2}, t^2),\ t \in \mathbb{R}$. Neste exemplo, exiba fórmulas explícitas mostrando que a curva é união de gráficos verticais ou horizontais.

(c) (Curva de Lissajous) $x = f(t) := \sin 2t,\ y = g(t) := \cos 3t$. Neste exercício dê especial atenção aos pontos múltiplos e verifique como a paridade e periodicidade das funções coordenadas está refletida na simetria da curva. Determine se a curva dada é fechada (Uma curva $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é dita fechada se $\alpha(a) = \alpha(b)$). Generalize a definição da curva de Lissajous. Faça uso do MAPLE.

(d) $f(t) = \dfrac{t(t+1)}{(t-2)}$ e $g(t) = \dfrac{t+1}{t(t-1)}$. Mostre que $f(t)$ determina na verdade quatro curvas parametrizadas, ou seja, o gráfico do traço de $f(t)$ possui quatro componentes conexas. Neste exemplo é sugerido o seguinte: Calcule os limites laterais de f e g em $\pm\infty$, $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$. Encontre também a reta tangente correspondente à $t = -1$.

(e) $f(t) = 2\cos t + \cos 2t$, $g(t) = 2\sin t - \sin 2t$. A curva é regular ? A curva é simples e fechada ? (ou seja fechada, sem auto-interseções, perfazendo uma única volta ?) A curva possui cúspides ? A curva possui simetrias ?. Faça uso do MAPLE.

(2) Exiba uma parametrização da curva C obtida pela interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, e do cilindro $x^2 + (y-1)^2 = 1$, chamada de *curva de Viviani*. Generalize.

(3) Exiba outro exemplo não trivial de uma curva regular numa esfera esboçando o desenho.

(4) Dê um exemplo de uma curva parametrizada diferenciável regular C que seja <u>completa</u> (o parâmetro da curva está definido para todos os valores de $\mathbb{R}$) e <u>propriamente</u> (a interseção de C com um disco fechado do plano é o conjunto vazio ou um conjunto compacto) <u>mergulhada</u> (sem auto-interseções).

(5) Deduza que a *hélice* é uma curva espacial que pode ser obtida como interseção de duas superfícies que são definidas geometricamente.

(6) Considere a curva dada por

$$x = t - 2\tanh t,\ y = \frac{2}{\cosh t}$$

chamada de *courbe des forçats* e considerada por Poleni em 1729.

(a) Será esta regular ? Será esta parametrizada pelo comprimento de arco ? Terá esta uma reta assímptota ? Estude a concavidade da curva e o comportamento no infinito. Desenhe a curva, indicando no desenho o sentido do movimento.

Um fato surpreendente é que a superfície (Figura 2) *associada (isométrica) no espaço hiperbólico tridimensional* $\mathbb{H}^3$ *a certo catenóide (mínimo) de* $\mathbb{R}^3$ *é uma superfície invariante por translações Euclideanas horizontais, cuja curva geradora é conhecida como* courbe des forçats descoberta por Poleni (Figura 1).

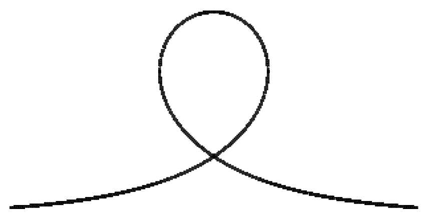

Figure 1

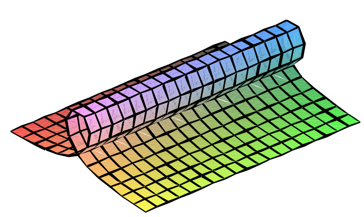

Figure 2