

## LISTA 2 DE GEOMETRIA DIFERENCIAL 2008.2

PROFESSOR RICARDO SÁ EARP

- (1) Vamos continuar com o traçado das curvas planas, agora incluindo o estudo da curvatura ao roteiro sugerido no exercício 1 da lista 1.
- (a) *A tractrix*. Considere o ponto do eixo horizontal  $x$  dado por  $(a, 0)$ ,  $a > 0$ . Vamos definir geometricamente a tractrix dizendo que um ponto  $p$  pertence à tractrix se o comprimento da reta tangente em qualquer ponto da curva compreendido entre o ponto de tangência e o eixo vertical  $y$  é constante, digamos, igual a 1.
- (i) Exiba uma parametrização da tractrix.
  - (ii) Esboce o traço da curva, indicando no desenho o sentido do movimento, nos moldes do exercício 1 da lista 1.
  - (iii) Estude o comportamento da curvatura da tractrix em torno dos pontos singulares e no infinito.
  - (iv) Determine as retas tangentes nas cúspides.
- (b) Considere a curva  $C$  dada implicitamente pela equação (aqui você terá que rever o teorema das funções implícitas do Cálculo II)  $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 2ay^2 = 0$ .
- (i) Encontre uma reta de simetria de  $C$ .
  - (ii) Encontre uma fórmula da curvatura de  $C$  em termo da função  $f(x, y)$ .
  - (iii) Encontre os pontos singulares da curva.
  - (iv) Encontre os pontos da curva em que a curva é um gráfico vertical numa vizinhança deste ponto. Idem, para gráfico horizontal.
  - (v) Encontre uma parametrização global da curva, estudando o comportamento da função curvatura, em torno dos pontos singulares e no infinito. Desenhe a curva indicando no desenho o sentido do movimento.
- (c) Considere a curva  $C$  dada implicitamente por  $f(x, y) = x^3 + y^3 = 3xy$ .
- (i) Encontre uma reta de simetria de  $C$ .

- (ii) Encontre uma fórmula da curvatura de  $C$  em termo da função  $f(x, y)$ .
  - (iii) Encontre os pontos singulares da curva.
  - (iv) Encontre os pontos onde a reta tangente é vertical.
  - (v) Encontre os pontos da curva em que a curva é um gráfico vertical numa vizinhança deste ponto. Idem, para gráfico horizontal.
  - (vi) Deduza que o traço da curva parametrizada
 
$$\alpha : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ dada por } \alpha(t) = \left( \frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right)$$
 é uma parte de  $C$ , definindo rigorosamente esta parte: Estude o comportamento da curvatura quando  $t \rightarrow -1$  e quando  $t \rightarrow \infty$ .  
 Deduza que a reta  $x + y = -1$  é uma reta assíntota de  $C$ .
- (d) Considere o cardióide  $C$  dado na forma polar por  $r = 2a(1 + \cos t)$ ,  $a > 0$ . Estude a curvatura do cardióide nos pontos singulares. Determine as suas cúspides e as retas tangentes nestes pontos. Desenhe a curva apontando as simetrias no desenho.
- Escreva o cardióide na forma implícita  $f(x, y) = 0$  determinando os pontos singulares de  $f(x, y)$  sobre a curva (a curva não é um gráfico de uma função diferenciável numa vizinhança deste ponto).
- (e) Considere a curva dada implicitamente por  $f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$ . Estude a curva.
  - (f) Descreva geometricamente o ciclóide, determinando uma parametrização da curva. Calcule a sua curvatura e estude o comportamento desta em torno das cúspides.
- (2) Seja  $\alpha$  um número real positivo. Estude o comportamento da curvatura da curva  $y = x^\alpha$ ,  $x > 0$ , quando  $x \rightarrow 0$ .
- (3) Classifique todas as curvas parametrizadas regulares planas com curvatura constante.
- (4) Mostre que a curvatura com sinal de uma curva parametrizada regular plana é invariante por uma isometria positiva (preserva orientação) de  $\mathbb{R}^2$ . Mostre que uma isometria negativa muda o sinal da curvatura com sinal.
- (5) Sejam  $\alpha : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco  $s$  tal que a curvatura com sinal  $k^+(s)$  satisfaz  $k^+(-s) = k^+(s)$ ,  $\forall s \in (-1, 1)$ . Deduza que o traço de

$\alpha$  é simétrico com respeito a reta normal ao traço  $C$  de  $\alpha$  na origem.

- (6) Seja  $\alpha : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada regular e seja  $p$  um ponto de  $\mathbb{R}^2$  que não está no traço  $C$  de  $\alpha$ . Seja  $g(t) := d(\alpha(t), p)$  a distância do ponto  $\alpha(t)$  de  $C$  ao ponto  $p$ . Seja  $f(p) := d(C, p)$  a distância entre  $C$  e  $p$ .

(a) Deduza que  $f(p)$  é uma função contínua.

(b) Assuma que existe  $t_0 \in (-1, 1)$  tal que  $f(p) = g(t_0)$ . Deduza que a reta ligando os pontos  $p$  e  $\alpha(t_0)$  é normal à  $\alpha$  em  $t_0$ .

- (7) Seja  $\alpha : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada regular pelo comprimento de arco  $s$ . Mostre que se as normais passam por um ponto dado, então o traço  $C$  de  $\alpha$  é um arco de círculo.

- (8) Seja  $\alpha : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada regular pelo comprimento de arco  $s$ . Mostre que se as retas tangentes são equidistantes de um ponto dado, então a curva é, ou bem um segmento de reta, ou bem um arco de círculo.

- (9) Seja  $\alpha : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada regular. Seja  $C$  o traço de  $\alpha$ . Deduza que se a curvatura  $k$  de  $\alpha$  satisfaz  $k(0) > 0$ , então restringindo-se  $\alpha$  a uma vizinhança da origem, segue que o seu traço desta restrição, digamos,  $C_0$ , é *localmente*, numa vizinhança da origem, o gráfico de uma função estritamente convexa— escolhendo-se apropriadamente os eixos coordenados.

Além disso, conclua que  $C_0$  é de fato *estritamente convexa*, ou seja  $C_0$  está de um lado de sua reta tangente num seu dado (arbitrário) ponto e o único ponto da curva comum com a reta tangente é o ponto de tangência.

- (10) Seja  $\alpha : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada regular. Dizemos que a curva  $\alpha$  é *localmente convexa*, se restrição do traço de  $\alpha$  digamos,  $C_0$ , à imagem de  $\alpha$  restrita a um pequeno intervalo  $(s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$  em torno de um dado ponto  $s_0 \in (-1, 1)$ , está contido (a propriedade é local) de um lado de sua reta tangente em  $s_0$ .

Caso o traço  $C$  de  $\alpha$  esteja globalmente de uma lado de sua reta tangente em cada  $s_0 \in (-1, 1)$ , dizemos que  $C$  é *convexa*.

(a) Defina convexidade local e convexidade global em termos da função  $h_{s_0}(s) = (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot n(s_0)$ .

(b) Defina os conceitos de localmente estritamente convexo e globalmente estritamente convexo.

(c) Dê exemplos de curvas parametrizadas regulares fechadas cuja curvatura é estritamente positiva, mas a curva não é globalmente convexa.

- (d) Dê exemplos de curvas parametrizadas regulares simples fechadas convexas mas não estritamente convexas.
- (e) Dê exemplos de curvas parametrizadas regulares simples propriamente mergulhadas que são estritamente convexas.
- (f) Dê exemplos de curvas parametrizadas regulares completas com retas assíntotas que são estritamente convexas.

Será  $C$ , o traço de  $\alpha$ , quando  $k(0) > 0$ , localmente estritamente convexa ?

- (11) O que se pode dizer, se  $k^+(s) \geq 0, \forall s \in (-1, 1)$ : Será que a restrição do traço de  $\alpha$  a um pequeno intervalo em torno de cada  $s \in (-1, 1)$  é, localmente, (numa vizinhança de qualquer ponto fixado  $s$ ) *convexa*?

De fato, deduza que existe uma vizinhança de  $s = s_0$ , tal que o traço da curva restrita a esta vizinhança, está contido no semi-plano determinado pela reta tangente à curva em  $s_0$  para o qual o normal unitário  $n(s_0)$  está apontando.

- (12) Seja  $\alpha : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada regular pelo comprimento de arco  $s$ . Seja  $C$  o traço de  $\alpha$ . Será que quando  $k^+(s) \geq 0, \forall s \in (-1, 1)$   $C$  é *globalmente convexa*, ou seja, o seu traço  $C$  está contido num dos semi-planos fechados limitados pela reta tangente em cada ponto ?

- (13) Seja  $\alpha : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada regular pelo comprimento de arco  $s$ . Seja  $k^+(s)$  a curvatura com sinal de

$\alpha(s)$ . Considere a quantidade  $C(k) := \int_0^\ell k^+(s)$ , Deduza que

$C(k) = 2\pi I, I \in \mathbb{Z}$ , ou seja  $C(k)$  é um múltiplo inteiro de  $2\pi$ . O número  $I$  chamado de *índice de rotação*. Exiba exemplos tais que  $I$  vale  $\pm 2, \pm 4$ .

Um resultado global é que  $I = \pm 1$ , se e somente se, a curva parametrizada  $\alpha$  é *simples e fechada*.

Em seguida cito outros dois teoremas globais sobre curvas planas: O *teorema de Jordan* diz que o traço  $C$  de uma curva parametrizada regular plana simples e fechada  $\alpha : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$  divide o plano  $\mathbb{R}^2$  em exatamente duas componentes conexas, sendo  $C$  a fronteira comum destas. Daí, tais curvas são também chamadas de *curvas de Jordan*.

Outro resultado global, diz que uma curva de Jordan é *convexa* (a curva está contida num dos semi-planos determinados pela sua reta tangente, em cada ponto), se e somente se a sua curvatura com sinal  $k^+(s)$  não muda de sinal ao longo da curva.

Além disso, quando  $C$  é convexa, o domínio limitado  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  delimitado pelo traço  $C$  da curva, é um conjunto convexo do plano.