

## LISTA 3 DE GEOMETRIA DIFERENCIAL 2008.2

PROFESSOR RICARDO SÁ EARP

- (1) *O Círculo osculador.* Seja  $\alpha : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , uma curva parametrizada regular pelo comprimento de arco  $s$ . Suponha que a curvatura em  $s = 0$  não se anule e que a orientação da curva esteja escolhida de forma que  $k^+(0) = k(0) > 0$ . Definimos o número real positivo  $R := 1/k(0)$ , chamado de raio de curvatura da curva em  $s = 0$ .

Seja  $\lambda > 0$  e seja  $C_\lambda$  o círculo centrado em  $a_\lambda := \alpha(0) + \lambda n(0)$ , e de raio  $\lambda$ . Seja  $D_\lambda$  o disco fechado de raio  $\lambda$  centrado em  $a_\lambda$  (cujo bordo é  $C_\lambda$ ). Deduza o seguinte:

- (a) Se  $\lambda < R$  então, existe  $\delta > 0$  tal que a restrição do traço de  $\alpha$  ao intervalo perfurado  $0 < |s| < \delta$  é exterior ao disco  $D_\lambda$ .
- (b) Se  $\lambda > R$  então, existe  $\delta > 0$  tal que a restrição do traço de  $\alpha$  ao intervalo perfurado  $0 < |s| < \delta$  é interior ao disco  $D_\lambda$ .

O círculo centrado em  $\alpha(0) + Rn(0)$  de raio  $R$  é chamado de *círculo osculador* e é o círculo que melhor aproxima a curva numa vizinhança de  $\alpha(0)$ . O centro deste círculo é chamado de *centro de curvatura*. A curva

$\beta(s) = \alpha(s) + (1/k(s))n(s)$ , cujo traço consiste na união de todos os centros de curvatura, é chamada de *evoluta* da curva original.

- (c) Estude a evoluta da elipse nos moldes do exercício 1 da lista 1, determinando, em particular, os seus pontos singulares, marcando a orientação da curva no desenho e estudando o comportamento da curvatura da curva.
- (d) Deduza o seguinte: A evoluta de uma tractrix é uma *catenária* que admite uma parametrização da forma  $t \mapsto (\cosh u, u)$ . A evoluta de uma ciclóide é uma ciclóide, a evoluta de uma cardióide é uma cardióide e a evoluta de uma espiral logarítmica é outra espiral logarítmica ( $\rho = a e^{b\theta}$ ).
- (2) Seja  $\alpha(t)$ ,  $t \in I$  uma curva regular plana e seja  $s$  um número real fixado. A *curva paralela* à  $\alpha$  é a curva plana  $\beta$  definida por

$$\beta(t) = \alpha(t) + s \vec{n}$$

onde  $\vec{n}$  é o campo de vetores normais unitários ao longo de  $\alpha$  definido na sala de aula.

- (a) Mostre que a curvatura com sinal  $k_\beta$  da curva paralela  $\beta$  é dada por

$$k_\beta(t) = \frac{k_\alpha(t)}{|1 - sk_\alpha|}$$

- (b) A curva paralela é necessariamente regular? A paralela de uma curva simples fechada (mergulhada) é ainda mergulhada (sem auto-interseções)? Para  $|s|$  pequeno a paralela é uma curva à distância  $|s|$  da curva original  $\alpha$ ?

Caso a curva seja simples e fechada satisfazendo  $k_\alpha \geq 0$ , será que a paralela é uma curva convexa, para  $s$  suficientemente pequeno?

- (c) A paralela à uma elipse é uma elipse? Estude as curvas paralelas a uma elipse, levando em conta a regularidade e curvatura.
- (d) Estude as curvas paralelas a uma catenária, levando em conta a regularidade e curvatura.
- (e) Assuma que  $C_0$  seja uma curva regular, simples, fechada e estritamente convexa. Assuma que  $s > 0$ . Sejam  $L_0$  e  $A_0$  o comprimento de  $C_0$  e a área da região delimitada por  $C_0$ , respectivamente. Sejam  $L(s)$  e  $A(s)$  o comprimento e a área relativos à paralela a  $C(s) := C_0 + s\vec{n}$ , sendo  $\vec{n}$  um normal exterior a  $C_0$ .
- (i) Mostre que  $C(s)$  é uma curva regular fechada e estritamente convexa.
- (ii) Mostre que o comprimento  $L(s)$  da paralela é  $L(s) = L_0 + 2\pi s$  e que a área  $A(s)$  englobada por  $C(s)$  é  $A(s) = A_0 + sL_0 + \pi s^2$ .

- (3) No próximo exercício você terá que aplicar o *princípio do máximo* para curvas planas.

- (a) Dada uma função suave  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ , (constante); será que existe uma seqüência de pontos  $\{x_n\}$ , satisfazendo  $x_n \rightarrow \infty$  (quando  $n \rightarrow \infty$ ) com  $\lim_{n \rightarrow \infty} k(x_n) = 0$ ? (Aqui  $k$  é a curvatura do gráfico de  $f$ ). Generalize.
- (b) Discuta a existência de uma curva parametrizada regular plana  $\alpha : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  (“fim”) assimptótica a uma reta

- (não necessariamente uma assíptota), cuja curvatura  $k$  seja longe de 0, ou seja,  $k(s) \geq c > 0$ , para  $s$  suficientemente grande.
- (4) Seja  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada regular que é periódica, i.e, existe  $a > 0$  tal que  $\alpha(t + a) = \alpha(t), \forall t$ . Deduza que existe um “menor número”  $A > 0$  tal que  $\alpha(t + A) = \alpha(t), \forall t \in \mathbb{R}$ . O número  $A$  é chamado de período.
- (5) Deduza que para uma *curva geométrica simples plana* ou sub-variedade de dimensão 1 de  $\mathbb{R}^2$ , duas parametrizações regulares ao redor de um mesmo ponto, são ligadas por uma mudança de parâmetro numa vizinhança deste ponto; ou seja, numa vizinhança do ponto uma parametrização é uma re-parametrização da outra.
- (6) Dê exemplos de parametrizações regulares injetoras cujo traço não seja uma variedade de dimensão 1 de  $\mathbb{R}^2$ .
- (7) Deduza que uma curva simples plana  $C$  satisfazendo  $\inf_{p \in C} k^+(p) > 0$  é uma *oval*; ou seja  $C$  é uma curva convexa simples e fechada (compacta) estritamente convexa.