

LISTA 4 DE GEOMETRIA DIFERENCIAL 2008.2

PROFESSOR RICARDO SÁ EARP

- (1) Deduza que a curvatura $\kappa(s) > 0$ e a torção $\tau(s)$ de uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ (com vetor curvatura não nulo em cada ponto) são invariantes por isometrias positivas de \mathbb{R}^3 .
- (2) Considere a hélice dada por $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$.
 - (a) Encontre um grupo à um parâmetro de isometrias G de \mathbb{R}^3 de forma que a hélice seja *invariante* por G .
 - (b) Demonstre, sem fazer as contas da torção e da curvatura, que a curvatura e a torção da hélice são constantes.

Em seguida, fazendo uma conta, encontre estas constantes.

- (c) A cada ponto da hélice trace a reta passando por este ponto e perpendicular ao eixo z . Obtenha uma parametrização da superfície resultante e responda se tal superfície é invariante pela ação do mesmo grupo G ?
- (3) Mostre que a cúbica retorcida $t \mapsto (t, t^2, t^3)$ tem curvatura k e torção τ respectivamente dadas por

$$k(t) = \frac{(4 + 36t^2 + 36t^4)^{1/2}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}} \quad \tau(t) = \frac{-3}{(1 + 9t^2 + 9t^4)}$$

Desenhe a curva, usando o MAPLE, fazendo uma análise.

- (4) Considere $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s de curvatura $k(s) > 0$ positiva, cujo traço esteja contido na esfera de centro p e de raio $r > 0$. Assuma que a torção $\tau(s)$ de γ nunca se anule e que $k'(s) \neq 0, \forall s \in I$.
 - (a) Deduza que γ satisfaz a seguinte equação diferencial (Monge, 1807)

$$\frac{1}{k^2} + \left(\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{k} \right)' \right)^2 = r^2 \quad (*)$$

- (b) Conclua que uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada pelo comprimento de arco s de curvatura $k(s) > 0$ positiva,

cujo *traço* esteja contido na esfera de centro de raio $r > 0$, satisfaz para $s_0 \in I$:

$$k'(s_0) = 0 \iff k(s_0) = 1/r \text{ ou } \tau(s_0) = 0.$$

- (c) Considere novamente a *curva de Viviani* obtida pela interseção do cilindro $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ com a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$. Cheque que uma parametrização da curva está dada por:

$$\alpha(t) = a(1 + \cos t, \sin t, 2 \sin(t/2)), \quad -2\pi \leq t \leq 2\pi$$

Usando o MAPLE, estude a curvatura e a torção, determinando os máximos e mínimos da curvatura, desenhando os gráficos da curvatura da torção. Desenhe a curva.

Deduza que no ponto de máximo ou de mínimo t_0 , a curvatura é igual a $k(t_0) = \frac{1}{a} = \text{curvatura média da esfera de raio } a$.

- (d) Mostre que se uma dada esfera de centro p e raio r contém o traço de uma curva γ (satisfazendo as mesmas hipóteses sobre a curvatura e a torção dadas acima no início do exercício (3)) então vale a seguinte equação:

$$p = \gamma(s) + \frac{1}{k(s)}\mathbf{n} - \frac{1}{\tau(s)}\left(\frac{1}{k(s)}\right)'\mathbf{b}$$

onde \mathbf{n} e \mathbf{b} são o normal e o binormal ao longo de γ , respectivamente.

- (5) Dê exemplos variados explícitos de curvas na esfera de raio 1 e verifique as equação (*) acima.
 (6) Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada regular cuja curvatura é $\kappa(s) > 0$. Suponha que o traço de α esteja contido numa esfera e que α tenha torção $\tau(s) = \text{cst} = a \in \mathbb{R}$.

Deduza que existem $b, c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\kappa(s) = \frac{1}{b \cos as + c \sin as}$$

- (7) Defina informalmente o tubo ao redor de uma curva (regular) movendo um pequeno círculo centrado na curva e ortogonal a curva ao longo da curva. Agora tente encontrar uma definição rigorosa de *tubo de raio r ao redor de uma curva regular γ* dando vários exemplos, considerando várias curvas (p. exemplo: hélices). Calcule o volume da região sólida englobada pelo tubo.
 (8) Uma em hélice cilíndrica ou simplesmente hélice é uma curva parametrizada regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ que é uma generalização

das hélices circulares. Estão definidas pela propriedade que as tangentes fazem um ângulo constante α com uma direção fixada L . Ou seja se \vec{v} o vetor unitário diretor de L , então

$$\vec{v} \cdot T(s) = \cos \alpha = \text{const}$$

Assuma que $k(s), \tau(s) \neq 0, \forall s \in I$, onde k e τ são respectivamente a curvatura e a torção de γ .

(a) Mostre que a hélice satisfaz

$$\frac{k}{\tau} = -\tan \alpha = \text{constante}$$

Esta equação caracteriza as hélices ? Este é um teorema de Lancret demonstrado por Saint Venant em 1845.

(b) Suponha que L seja o eixo- z . Mostre que a curvatura k^\perp da projeção da hélice no plano ortogonal a L é dada por

$$k^\perp = k \operatorname{cosec}^2 \alpha$$