

## LISTA 5 DE DIFERENCIAL 2008

PROFESSOR RICARDO SA EARP

- (1) Considere a equação  $y^3 = e^{x+y}$ .
  - (a) Mostre que em torno do ponto  $(-1, 1)$  a equação define uma curva mergulhada dada como um gráfico de uma função  $y = f(x)$ , calculando  $f'(-1)$ .
  - (b) Estude os pontos em que a equação está dada por um gráfico horizontal  $x = g(y)$ , determinando explicitamente  $g$ , se tal é possível, estudando, neste caso, o seu comportamento (análise da primeira e segunda derivada).
  - (c) O que acontece se modificamos a equação na forma  $y^n = \alpha(x) e^y$ , em torno do ponto  $(0, 0)$  com  $\alpha(0) = 0$  e  $\alpha'(0) \neq 0$ ?
  - (d) Use o MAPLE para traçar o gráfico da curva.
- (2) Estude a equação  $x^2 - xz + z^2 + yz = 4$ . Responda se 4 é um valor regular ou não de  $f(x, y, z) = x^2 - xz + z^2 + yz$ , respondendo justificando se  $S := f^{-1}(4)$  é uma superfície regular ou não. Use o MAPLE para traçar  $S$ , explicitando graficamente uma vizinhança de  $(x = 1, y = 3)$ .
- (3) Considere o sistema

$$u \sin v + x^2 = 0$$

$$u \cos v - y^2 = 0$$

- (a) Determine condições para que o  $u$  e  $v$  satisfazendo o sistema possam ser escritas como funções de  $x$  e de  $y$ ; neste caso encontre as derivadas parciais de  $u$  com respeito a  $x$  e  $y$  fazendo derivação implícita. Verifique o resultado explicitando  $u$  no sistema dado.
- (4) Verique se as funções  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  abaixo são suaves e determine os abertos  $\Omega$  do espaço de maneira que 0 seja um valor regular, de maneira que  $f^{-1}(0)$  seja uma superfície regular, estudando tal superfície. Quando 0 não é um valor regular estude assim mesmo o conjunto  $\{f(x, y, z) = 0, x, y, z \in \mathbb{R}\}$ . Use o MAPLE para esboçar várias superfícies atribuindo valores para as constantes.
  - (a)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - c = 0; c \in \mathbb{R}$ .
  - (b)  $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 - cz^2 = 0; a, b, c > 0$ .

- (c)  $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 - cz^2 + 1 = 0$ ;  $a, b, c > 0$ .  
 (d)  $((x^2 + y^2)^{1/2} - a)^2 + z^2 - r^2 = 0$ ;  $a > r > 0$ .
- (5) Verifique se os conjuntos abaixo são subvariedades ou não, fazendo primeiramente  $n = 2, 3$  determinando sua dimensão e estudando-os geometricamente: interseções com os hiperplanos coordenados verificando simetrias-grupos do espaço ambiente que deixam o conjunto invariante-, conexidade, completude (se são completas).
- (a)  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 - 1 = 0$  ( $n \geq 2$ ).  
 (b)  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 + 1 = 0$  ( $n \geq 2$ ).  
 (c) Generalize definindo outras quádricas de dimensão arbitrária.
- (6) Estude  $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , considerando os casos  $c \neq 0$  e  $c = 0$ , separadamente, determinando explicitamente o conjunto quando  $c = 0$ , e determinando os valores de  $c$  para os quais a equação define implicitamente uma superfície regular.
- (7) Estude  $f(x, y, z) = x^n + y^n + z^n = c$ ,  $c > 0$ ,  $n \geq 2$ .  
 (8) Estude  $f(x, y, z) = (yz)^2 + (xz)^2 + (xy)^2 = 1$ .  
 (9) Seja  $S$  uma superfície regular.
- (a) Deduza que se  $S$  é compacta e  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma imersão injetora, então  $\varphi(S)$  é uma superfície regular de  $\mathbb{R}^3$ .  
 (i) Seja  $\varphi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\varphi(p) = f(p)p$  ( $f$  diferenciável e estritamente positiva em  $\mathbb{S}^2$ ). A imagem  $S := \varphi(\mathbb{S}^2)$  é chamada de gráfico radial. Deduza que  $S$  é uma superfície regular.  
 Deduza que  $\varphi : \mathbb{S}^2 \rightarrow S$  é um difeomorfismo.

Seja  $p$  um ponto de  $S$  e  $v$  um vetor tangente à  $S$  em  $p$  ( $v \in T_p S$ ). Considere  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  uma curva parametrizada diferenciável tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = v$ . Seja  $f$  uma função diferenciável em  $S$ . Considere a quantidade  $f \circ \alpha(t)$ .

- (b) Deduza que se  $S$  é uma superfície compacta, então  $f$  tem sempre um ponto crítico.  
 (c) Deduza que se  $S$  é conexa e se todos os pontos de  $S$  são pontos críticos de  $f$ , então  $f$  é constante.  
 (d) Generalize os três itens acima ao contexto de *variedades diferenciáveis*.  
 (e) *Função altura*. Seja  $p_0 \in \mathbb{R}^3$  e  $a \in \mathbb{R}^3$  um vetor unitário não nulo. Defina a *função altura* por  $h(p) = (p - p_0) \cdot a$ , onde  $\cdot$  denota o produto interno em  $\mathbb{R}^3$ .  
 (i) Calcule a diferencial  $d_p(v)$ , exibindo uma fórmula.

- (ii) Seja  $p \in S$  um ponto crítico de  $h$ . Dê uma interpretação geométrica e exiba exemplos explícitos de *superfícies compactas*  $S$  de gênero  $g$  arbitrário, funções altura e seus pontos críticos.
- (iii) Deduza que se  $S$  é compacta existe um ponto de  $S$  cuja reta normal é paralela à  $a$ .
- (iv) Deduza que se  $S$  é completa e se todas as retas normais são paralelas ao vetor  $a$  então  $S$  é um plano. E se  $S$  é apenas conexa ?
- (f) *Função distância*. Seja  $p_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus S$  e seja  $h(p) = |p - p_0|^2$  o quadrado da função distância.
- (i) Calcule a diferencial  $d_p(v)$ , exibindo uma fórmula.
- (ii) Seja  $p \in S$  um ponto crítico de  $h$ . Dê uma interpretação geométrica.
- (iii) Exiba exemplos explícitos de superfícies conexas  $S$  e pontos críticos da função distância.
- (iv) Conclua o seguinte: De um ponto arbitrário  $p_0 \in \mathbb{R}^3$  se pode traçar uma reta que é normal a uma dada superfície compacta  $S$ .
- (v) Deduza o seguinte: Se as retas normais a uma superfície completa  $S$  se intersectam num ponto  $p_0$ , então a superfície  $S$  é uma esfera centrada em  $p_0$ . E se  $S$  é apenas conexa ?
- (g) *Quadrado da distância a uma reta*. Considere  $r$  a reta passando por  $p_0$  com vetor diretor unitário  $a$ . Seja  $h(p) = |p - p_0|^2 - ((p - p_0) \cdot a)^2$ .
- (i) Calcule a diferencial  $d_p(v)$ , exibindo uma fórmula.
- (ii) Seja  $p \in S$  um ponto crítico de  $h$ . Dê uma interpretação geométrica e exiba exemplos explícitos de superfícies  $S$  e pontos críticos da função  $h(p)$ .
- (iii) Deduza que se  $S$  é compacta existe um ponto de  $S$  tal que a normal à  $S$  neste ponto intersecta a reta  $r$  perpendicularmente.
- (iv) Deduza que se  $S$  é completa e se todas as normais intersectam a reta  $r$  perpendicularmente, então  $S$  é um cilindro circular reto com eixo  $r$ .
- (h) Seja  $S$  uma superfície compacta. Deduza que existem dois pontos  $p$  e  $q$  tal que a reta passando por estes pontos corta  $S$  ortogonalmente.
- (i) Seja  $p_0 \notin S$ . Seja  $\mathbb{S}^2$  a esfera unitária em  $\mathbb{R}^3$ . Considere a projeção  $\pi : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  dada por  $\pi(p) = \frac{p - p_0}{|p - p_0|}$ . Dê uma

condição geométrica para que  $\pi$  seja um difeomorfismo local.

- (10) Encontre uma E.D.P. de primeira ordem que cuja superfícies integrais estão dadas por  $u(x, y, z) = xy + z^2 = c$ , onde  $c$  é uma constante.
- (11) Assuma que  $F(x, y, z) = 0$  define localmente implicitamente uma superfície que pode ser vista tanto como um gráfico vertical  $z = f_1(x, y)$ , ou como um gráfico horizontal das duas formas  $x = f_2(y, z)$  ou  $y = f_3(x, z)$ . Mostre que  $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = -1$ , interpretando.
- (12) Considere uma superfície de revolução em torno do eixo  $z$  da forma  $z = F(r)$ ,  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ . Mostre que as derivadas parciais de  $z = z(x, y)$  satisfazem uma EDP linear (homogênea) de primeira ordem da forma  $yp - xq = 0$ , onde  $p = z_x$  e  $q = z_y$ .
- (13) Considere uma superfície que é localmente o gráfico de uma função  $z(x, y)$  dada implicitamente por uma equação da forma  $F(u, v) = 0$ , onde  $u = u(x, y, z)$  e  $v = v(x, y, z)$  são funções dadas de  $x, y, z$  de classe  $C^1$ , e  $F$  é uma função dada de  $u$  e de  $v$  de classe  $C^1$ . Mostre que  $p = z_x$  e  $q = z_y$  satisfazem uma E.D.P. de primeira ordem  $p \frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)} + q \frac{\partial(u, v)}{\partial(z, x)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ , onde  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = u_x v_y - u_y v_x$ , etc..
- (14) Seja  $v = v(x, y)$  e  $u = u(x, y)$ , para  $(x, y) \in \Omega$ , sendo  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^2$ . Admita que  $u, v$  sejam de classe  $C^1$ . Assuma que  $u = H(v)$ , onde  $H$  é de classe  $C^1$ .
- (a) Encontre  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  e  $H$  explícitas; por exemplo,  $u$  e  $v$  satisfazendo  $u^2 + v^2 = 1$  ou  $v = u^2 - 3u + 2$ .
- (b) Mostre que  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = u_x v_y - u_y v_x \equiv 0$ . Verifique esta relação nos exemplos obtidos em (a).
- (c) Mostre a recíproca do resultado acima: Se  $\frac{\partial v}{\partial y} \neq 0$ , e  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = u_x v_y - u_y v_x \equiv 0$ , então existe uma relação funcional  $F(u, v) = 0$  entre  $u$  e  $v$  não envolvendo  $x$  e  $y$ .
- (15) Considere a E.D.P. quasilinear de primeira ordem (chamada também de equação de Lagrange) dada por

$$P(x, y, z)p + Q(x, y, z)q = R(x, y, z) \quad (1)$$

onde  $P, Q, R$  são funções de classe  $C^1$  que não se anulam simultaneamente.

(a) Mostre que se  $z(x, y), p = z_x, q = z_y$  é uma solução de (1) dada implicitamente pela equação  $u(x, y, z) = c_1$  então  $Pu_x + Qu_y + Ru_z = 0$ .

(b) Mostre que se  $\tilde{z}(x, y)$  é outra solução da mesma equação independente de  $z(x, y)$  dada implicitamente por

$$v(x, y, z) = c_2 \text{ então } \frac{P}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)}} = \frac{Q}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(z, x)}} = \frac{R}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}}.$$

Mas, de um exercício anterior, obtivemos que para uma  $F$  arbitrária, a solução da equação  $F(u, v) = 0$  satisfaz à E.D.P.

$$p \frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)} + q \frac{\partial(u, v)}{\partial(z, x)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}.$$

Conclua que a solução geral de (1) é da forma

$$F(u, v) = 0$$

para  $F$  arbitrária de classe  $C^1$ , e  $u(x, y, z) = c_1, v(x, y, z) = c_2$  são duas soluções independentes do sistema

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}$$

(c) Encontre a solução geral das E.D.P's abaixo.

(i)  $xp + yq = z$ .

(ii)  $yzp + xzq = xy$

(iii)  $x^2p + y^2q = (x + y)z$

(iv)  $z_t + zz_x = 0$ . Neste exemplo encontre uma solução geral da forma  $z(x, t) = \varphi(x - zt)$ . Verique que de fato  $z(x, y)$  satisfaz a E.D.P. Em seguida determine  $\varphi$  de modo que  $z(x, 0) = -x$ , explicitando  $z(x, t)$  em termos de  $x$  e de  $t$ , estudando o comportamento desta solução quando  $t \rightarrow 1$ .

(16) Considere as aplicações diferenciáveis  $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  abaixo, onde  $\Omega = \mathbb{R}^2$  ou  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Determine o conjunto dos pontos singulares  $\mathcal{S} \subset \Omega$ , suas imagens  $X(\mathcal{S})$  e os abertos  $U = \Omega \setminus \mathcal{S}$  tais que estas aplicações restritas a estes abertos determinam imersões. Exiba também a equação do plano tangente num ponto regular. Use o MAPLE para traçar o gráfico da superfície em torno de um ponto singular.

- (a)  $x = u^2 + u - v^2, y = v(2u + 1), z = u^2 + v^2$ . O conjunto dos pontos singulares é unitário.
- (b)  $x = u + 1/u, y = v + 1/v, z = u/v + v/u$ ,  
 $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . O conjunto de pontos singulares é constituído de quatro pontos.
- (c)  $x = u + v, y = u^2 + v^2, z = u^3 + v^3$ . O conjunto dos pontos singulares é uma curva.
- (17) Dê exemplos de três funções  $F(x, y) = 0$ , satisfazendo  $F(0, 0) = 0, \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0$  tal que
- (a) O conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; F(x, y) = 0\}$  não é um gráfico de uma função  $y = f(x)$  ou  $x = g(y)$ , localmente, ao redor de  $(0, 0)$ .
- (b) O conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; F(x, y) = 0\}$  é da forma  $y = f(x)$ , mas  $f$  não é diferenciável em  $x = 0$ .
- (c) O conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; F(x, y) = 0\}$  é da forma  $y = f(x)$  com  $f$  de classe  $C^1$ .
- (d) Compare os resultados anteriores com o teorema da função implícita.
- (18) Dê exemplo de uma curva imersa no plano  $\mathbb{R}^2$  que não é propriamente imersa.
- (19) Dê exemplo de uma curva propriamente imersa no plano  $\mathbb{R}^2$  que não é mergulhada.
- (20) Dê exemplos equivalentes aos dos dois exercícios anteriores considerando superfícies imersas em  $\mathbb{R}^3$ .
- (21) Defina convexidade local para uma superfície dando exemplos disto. Idem para convexidade global, analisando exemplos compactos sem bordo (fechados). Analise também exemplos não compactos e completos.
- (22) Uma oval de Cassini é o conjunto dos pontos  $(x, y)$  do plano que está definido como o *lugar geométrico* dos pontos cujas produto das distância de  $(x, y)$  a dois pontos fixados (chamados de focos) é constante. Assumindo que os focos são  $(\pm a, 0)$  e que a distância constante é  $b^2$ , encontre a equação cartesiana do conjunto (definição implícita da oval de Cassini). Estude as ovals de Cassini, fazendo uso do MAPLE, considerando os casos  $a^2 > b^2$ , e  $a^2 < b^2$  separadamente.