LISTA 6 DE GEOMETRIA DIFERENCIAL 2008

RICARDO SA EARP

(1) Considere a esfera unitária $\mathbb{S}^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ em $\mathbb{R}^3$.
  (a) Mostre que a *projeção estereográfica usual do pólo norte* é dada por

$$\Pi_N(x, y, z) = \frac{x + iy}{1 - z} := u + iv := E$$

  dando a interpretação geométrica desta aplicação.
  (b) Mostre que Π_N leva círculos da esfera em círculos ou retas no plano, determinando geometricamente cada situação.
  (c) Mostre que Π_N preserva os ângulos mas inverte as suas orientações.
  (d) Mostre que a inversa é dada por

$$z \longmapsto \left(\frac{2u}{E\overline{E} + 1}, \frac{2v}{E\overline{E} + 1}, \frac{E\overline{E} - 1}{E\overline{E} + 1} \right)$$

  onde $E\overline{E} = u^2 + v^2$.
  (e) Mostre que a métrica Euclideana $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ em $\mathbb{R}^3$ induzida em $\mathbb{S}^2$, induz em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a seguinte métrica

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^2}(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)\cdot$$

  (f) Generalize os itens anteriores considerando a esfera $\mathbb{S}^n$ de dimensão n, *i.e*, a esfera unitária centrada na origem de $\mathbb{R}^{n+1}$.
  (g) Considerando o referencial adaptado $\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\}$ da métrica $\mathrm{d}s^2 = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)$ na esfera $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, calcule a conexão Riemanniana ∇ da esfera determinando as quantidades $\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial v}$.
  Aplique o seu cálculo para escrever a equação das curvas em $\mathbb{S}^2$ de curvatura geodésica $\kappa_g = \mathrm{cst}$(constante).
  (h) Determine todas as isometrias positivas de $\mathbb{S}^2$.
  (i) A curvatura de Gauss de uma superfície Riemanniana é um invariante intrínseco (depende apenas da métrica). Em termos de coordenadas isotérmicas $z = x + iy$ pode ser

escrita como

$$K = -\frac{\triangle \log \lambda}{\lambda^2}$$

onde a métrica em termos das coordenadas isotérmicas (conformes) $z = x + iy$, é dada por $\mathrm{d}s^2 = \lambda^2 |\,\mathrm{d}z|^2$.
Mostre que a curvatura de Gauss da referida métrica esférica é $K \equiv +1$.

(j) Mostre que uma isometria positiva da referida métrica é o conjunto das transformações de Möbius da forma

$$T(z) = \frac{az - \overline{c}}{cz + \overline{a}}$$

satisfazendo $|a|^2 + |c|^2 = 1,\ a, c \in \mathbb{C}$.
Conclua que toda isometria positiva da esfera $\mathbb{S}^2$ leva círculos em círculos.

(k) Deduza diretamente, sem usar o item anterior, que toda isometria da esfera leva círculos em círculos.

(l) Mostre que para cada tal isometria positiva T correspondem z e $\dfrac{-1}{\overline{z}}$ fixados por T. Note que T é "elíptica", você sabe justificar esta terminologia ?

(m) A aplicação $z \mapsto 1/z$ é uma isometria positiva ? Descreva-a geometricamente.

(n) Mostre que os meridianos na esfera são as únicas geodésicas da esfera, fazendo obrigatoriamente um estudo da equação das geodésicas na esfera.

(o) Mostre que dados dois pontos p e q de $\mathbb{S}^2$ existe uma isometria positiva de $\mathbb{S}^2$ que leva p em q, ou seja $\mathbb{S}^2$ é uma variedade homogênea bidimensional.

(p) Mostre que dadas duas geodésicas C_1 e C_2 de $\mathbb{S}^2$ existe uma isometria positiva de $\mathbb{S}^2$ que leva C_1 em C_2.

(q) defina o conceito de *reflexão numa geodésica* da esfera, geometricamente, sem fazer uso do ambiente Euclideano. Em seguida, mostre que tal reflexão é a restrição de uma reflexão Euclideana de $\mathbb{R}^3$ à esfera.
Vale tal conceito na esfera $\mathbb{S}^n$?

(r) Defina o concieto de *translação ao longo de uma geodésica* na esfera $\mathbb{S}^2$. Deduza que tais translações são compostas de duas *reflexões em geodésicas*, como definido acima.
Vale tal conceito na esfera $\mathbb{S}^n$?

(s) Dados $p, q \in \mathbb{S}^2$ seja $\mathrm{dist}_{\mathbb{S}^2}(q, p)$ a distância entre p, q (na métrica das esfera).

(i) Deduza que existe uma curva C na esfera que *minimiza* o comprimento de arco, dentre *todas* as curvas parametrizadas suaves regulares ligando p à q. Além disso, o traço desta curva é um arco de círculo de raio máximo contido em $\mathbb{S}^2$. Aqui faça um estudo alternativo analizando o funcional comprimento de arco.

(ii) Seja $C_r := \{q \in \mathbb{S}^2; \mathrm{dist}_{\mathbb{S}^2}(q, p_0) = r\}$, o *círculo esférico de raio* r *e centro* p_0 *em* $\mathbb{S}^2$.

(A) Deduza que o comprimento de C_r é proporcional ao *seno* de r.

(B) Agora, cálcule da conexão de $\mathbb{S}^2$, usando as chamadas *coordenadas esféricas* (θ, φ). Escreva a equação das curvas de curvatura geodésica constante em $\mathbb{S}^2$.

(C) Deduza que o vetor curvatura geodésico $\overrightarrow{\kappa_g}$ de C_r é dado por $\overrightarrow{\kappa_g} = -\cot\phi \frac{\partial}{\partial\phi} = -\cot r \frac{\partial}{\partial r}$, concluindo que a curvatura geodésica $\kappa_g = |\cot r|$.

(D) Deduza que se um paralelo P tem raio R (como círculo em $\mathbb{R}^3$), então $R = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa_g^2}}$, onde κ_g é a curvatura geodésica de P.

(E) Deduza que as isometrias da esfera levam círculos em círculos, em que círculos aqui significa uma curva obtida fazendo a interseção da esfera com um plano de $\mathbb{R}^3$. Dê o significado disto intrínseco, sem fazer menção ao ambiente $\mathbb{R}^3$.

(t) Uma curva na esfera que faz ângulo constante com os meridianos da esfera é chamada de *loxodrômica*.

(i) Mostre que a imagem de uma loxodrômica pela *projeção estereográfica* é uma espiral logarítmica.

(ii) Usando coordenadas esféricas, encontre uma equação diferencial de primeira ordem que as loxodrômicas satisfazem. Em seguida exiba uma fórmula explícita. Com a ajuda do MAPLE esboce uma loxodrômica na esfera estudando sua curvatura e sua torção.

(u) Determine todas as geodésicas de $\mathbb{S}^n$, exibindo uma fórmula explícita.

Além disso, dado um ponto $x \in \mathbb{S}^n$ e um vetor tangente unitário $v \in T_x\mathbb{S}^n$, tomando um outro vetor unitário u tangente a $\mathbb{S}^n$ em x *ortogonal* a v, estude a variação

$$H(s,t) = \cos s\, x + \sin s\,(\cos t\, v + \sin t\, u)$$

mostrando que a variação em $\mathbb{S}^n$ *por geodésicas* (as curvas $t = \text{cst}$ são geodésicas). Deduza que o campo variacional dado por $Y(s) := \dfrac{\partial H(s,t)}{\partial t}|_{t=0}$ é um campo de Jacobi na esfera, ou seja satisfaz a equação de segunda ordem dada por

$$Y'' + Y = 0$$

investigando a relação entre a equação de Jacobi e a *curvatura.*

(v) Determine todas as curvas na esfera $\mathbb{S}^2$ de curvatura geodésica constante.

(2) Encontre todas as geodésicas do cilindro de duas maneiras: Uma fazendo um estudo da equação das geodésicas no cilindro e outra fazendo uso de isometrias.

(3) Considere a superfície de revolução da *catenária*, chamada de *catenóide* dada por $x = a \cosh v \cos u, y = a \cosh v \sin u$, $z = av$; $0 < u < 2\pi, v \in \mathbb{R}$ ("catenóide menos um meridiano"). O catenóide é a única *superfície mínima de revolução* de $\mathbb{R}^3$. Considere o *helicóide* de $\mathbb{R}^3$ parametrizado por $x = a\overline{v} \cos \overline{u}, y = a\overline{v} \sin \overline{u}, z = a\overline{u}$; $0 < \overline{u} < 2\pi, \overline{v} \in \mathbb{R}$ ("pedaço do helicóide entre as alturas $z = 0$, e $z = 2\pi a$"). O helicóide é a única *superfície mínima regrada* de $\mathbb{R}^3$.

(a) Encontre uma definição geométrica do helicóide.
(b) Mostre que o helicóide é invariante por um grupo a 1-parâmetro de isometrias de $\mathbb{R}^3$ (*screw motions*).
(c) Estude as curvas coordenadas do catenóide e helicóide.
(d) Encontre uma definição geométrica do helicóide.
(e) Mostre que o catenóide e o helicóide são localmente isométricos. *Sugestão*: Aqui é preciso *re-parametrizar* o helicóide para ver isto.
(f) Verifique, fazendo um cálculo, que o helicóide e o catenóide tem mesma curvatura de Gauss em pontos correspondentes pela isometria local.
(g) Encontre uma uma família a 1-parâmetro de superfícies isométricas ligando o catenóide ao helicóide. Tal família é constituída de *superfícies mínimas invariantes por screw motions*, chamada de família *associada.* O catenóide é *conjugado* ao helicóide. Desenhe tal família, fazendo uso do MAPLE.

(4) Considere S uma superfície de revolução em torno do eixo z parametrizada por $X(u,\theta) = (a(u)\cos\theta, a(u)\sin\theta, c(u))$, $u \in I, \theta \in [0, 2\pi]$, onde $I \subset [0,\infty)$ é um intervalo da reta e $a(u) \geqslant 0$.

(a) Calcule o comprimento de um paralelo.
(b) Calcule a métrica de S no sistema de coordenadas (u, θ).
(c) Mostre que os meridianos são geodésicas de S.
(d) Encontre uma condição necessaria e suficiente sobre $a(u)$ de maneira que o paralelo $u = c_0$ seja uma geodésica.
(e) Determine a conexão Riemanniana ∇ da superfície S, calculando

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial \theta} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \frac{\partial}{\partial u} = \frac{a'(u)}{a(u)} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u} = 0, \quad \text{explique geometricamente este resultado}$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \frac{\partial}{\partial \theta} = -a'(u)\, a(u) \frac{\partial}{\partial u}$$

(f) Deduza que as equações das geodésicas em S são equivalentes ao seguinte sistema (aqui $(u(t), \theta(t))$ são expressões locais de uma curva em S):

$$\begin{cases} \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + a^2(u(t)) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 1 \\ a^2(u(t)) \frac{d\theta}{dt} = C, \quad (C\text{=cst}) \end{cases} \tag{1}$$

(g) Deduza que se existir dois paralelos de S da forma $a(u) = C$, então uma geodésica tangente a um destes paralelos, oscila entre estes dois paralelos. Verifique que o dado C determina a geodésica.
(h) Mostre que se φ é o ângulo que uma geodésica de S faz com um paralelo P dado por $a(u) = r = \text{cst}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, então temos a *equação de Clairaut*:

$$r \cos \varphi = |C|$$

(i) Deduza que se uma geodésica é assimptótica a um paralelo, este paralelo tem que ser uma geodésica.
(ii) Estude as geodésicas no parabolóide.
(iii) Estude as geodésicas no catenóide.

(5) Considere o plano hiperbólico $\mathbb{H}^2 = \{z = x + iy,\ y > 0\}$ munido da métrica hiperbólica $\mathrm{d}s^2 = \dfrac{1}{(\Im z)^2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)$.
(a) Estude as isometrias as de $\mathbb{H}^2$.
(b) Estude as as geodésicas de $\mathbb{H}^2$.

(c) Mostre que a curvatura de Gauss $K \equiv -1$.
(d) Calcule o comprimento do círculo hiperbólico de raio hiperbólico ρ.
(e) Calcule a área do disco hiperbólico de raio hiperbólico ρ.
(f) Determine a conexão Riemanniana de $\mathbb{H}^2$, calculando os símbolos de Christoffel associado ao referencial adaptado global canônico $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$.

(6) ***Responda verdadeiro ou falso. Caso falso exiba um contra-exemplo. Caso verdadeiro escreva uma dedução sucinta e rigorosa.***

(a) A curvatura de Gauss K é invariante por isometrias.
(b) Uma isometria $f : S \longrightarrow S$ de uma superfície conexa S em si mesmo satisfazendo $f(p) = p$ e $df_p = I$ (identidade) de T_pS para algum $p \in S$ é a identidade, *i.e* $f(q) = q$, $\forall q \in S$.
(c) Uma métrica da forma $du^2 + a^2(u)d\theta^2$ é uma métrica de uma superfície de revolução.
(d) Duas superfícies de $\mathbb{R}^3$ que são isométricas e que têm a mesma curvatura de Gauss $K = \text{cst}$ são congruentes, *i. e*, existe uma isometria positiva de $\mathbb{R}^3$ (movimento rígido) levando uma na outra.
(e) Existem superfícies invariantes por um grupo de isometrias de $\mathbb{R}^3$ (que não são de revolução), cuja métrica se escreve na forma $du^2 + a^2(u)d\theta^2$.
(f) Existe uma mudança de coordenadas (v, θ) de maneira que nas novas coordenadas a métrica de uma superfície de revolução se escreve da forma $a^2(dv^2 + d\theta^2)$. Logo, a curvatura de Gauss K de uma superfície de revolução é dada por $K = -a''(u)/a(u)$. (Para responder este item você terá que encontrar coordenadas conformes ou isotérmicas de S, encontrando a mudança de coordenadas apropriada).
(g) Por um ponto e uma vetor tangente da esfera $\mathbb{S}^2$ passam exatamente duas curvas de $\mathbb{S}^2$ de curvatura geodésica constante $\kappa_g = |\cot r|$.
(h) A equação (1) é ainda verdadeira para uma superficie abstrata S admitindo coordenadas locais (u, θ) provenientes de uma parametrização $X : I \times \mathbb{R} \to S$ satisfazendo $X(u, \theta + 2\pi) = X(u, \theta)$.

(i) Considere o plano $\mathbb{C}$ com coordenadas (u, v) munido da métrica $\mathrm{d}s^2 = \dfrac{1000}{(1+u^2+v^2)^2}(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)$

(i) Segue então que $(\mathbb{C}, \mathrm{d}s^2)$ é uma variedade Riemann-niana de dimensão 2 *completa*.

(ii) Segue então que $(\mathbb{C}, \mathrm{d}s^2)$ é uma variedade Riemann-niana de dimensão 2 com curvatura de Gauss K *constante*.

(j) Dados duas geodésicas completas C_1 e C_2 de $\mathbb{S}^2$ existe uma *isometria positiva* de $\mathbb{S}^2$ levando C_1 em C_2.

(k) Considere o catenóide dado por $x = a \cosh v \cos u, y = a \cosh v \sin u$,
$z = av$; $0 < u < 2\pi, v \in \mathbb{R}$ ("catenóide menos um meridiano"). Considere o helicóide de $\mathbb{R}^3$ parametrizado por
$x = a \sinh v \cos u, y = a \sinh v \sin u, z = au$; $0 < u < 2\pi, v \in \mathbb{R}$ ("pedaço do helicóide entre as alturas $z = 0$, e $z = 2\pi a$").

(i) Se uma subvariedade S de dimensão 2 de $\mathbb{R}^3$ contém uma reta L, então L é uma *geodésica* de S; assim, as "retas geradoras" do helicóide são *geodésicas* do helicóide.

(ii) Segue que existe uma *isometria* (local) do catenóide no helicóide, que leva a curva geratriz (catenária) do catenóide numa reta. Logo, a catenária é uma *geodésica* do catenóide.

(iii) A isometria do item anterior se estende a uma isometria do *ambiente* $\mathbb{R}^3$.

(l) Considere o plano hiperbólico
$\mathbb{H}^2 = \{z = x + iy,\ y > 0\}$ munido da métrica hiperbólica $\mathrm{d}s^2 = \dfrac{1}{(\Im z)^2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)$.
Dados $p, q \in \mathbb{H}^2$ seja $\mathrm{dist}_{\mathbb{H}^2}(q, p)$ a distância entre p, q (na métrica hiperbólica). Seja $C_\rho := \{q \in \mathbb{H}^2; \mathrm{dist}_{\mathbb{H}^2}(q, p_0) = \rho\}$, o círculo de raio ρ e centro p_0 em $\mathbb{H}^2$.

(i) Segue então que o comprimento de C_ρ cresce *exponencialmente* com ρ.

(ii) O plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ é uma variedade Riemanniana de dimensão 2 *completa*.

(7) Deduza que os horociclos (retas Euclideanas horizontais ou círculos Euclideanos tangentes ao bordo assimptótico de $\mathbb{H}^2$) têm curvatura geodésica igual a 1.

Mais geralmente, determine todas as curvas de curvatura geodésica constante do plano hiperbólico.

(8) Seja g_1 a métrica de $\mathbb{S}^{n-1}$. Seja $(dr)^2$ a métrica canônica de $I = (0, \infty)$. Define-se a métrica g em $\mathbb{S}^{n-1} \times I$, por
$g_{m,r} = r^2 \cdot g_1 + (dr)^2, m \in \mathbb{S}^{n-1}, r \in I$
   (a) Será que g é a métrica produto ?
   (b) Deduzir que $(\mathbb{S}^{n-1} \times I, g)$ é isométrica à métrica de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ munida da métrica Euclideana.
   (c) Mostrar que $(\mathbb{S}^{n-1} \times I, g_1 \times (dr)^2)$ é isométrica ao cilindro $\mathcal{C} = \{x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1;\ x_0 > 0\}$ munido da métrica induzida de $\mathbb{R}^{n+1}$.

(9) Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^n \times (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, por
$f(z, r) := (x, t) = (\sin r \cdot z, \cos r)$,
$z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n, r \in (0, \pi)$.
   (a) Deduza que f determina um difeomorfismo
   $g : \mathbb{S}^{n-1} \times (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ por
   $g(z, r) = (\sin r \cdot z, \cos r)$.
   (b) Deduza que a métrica induzida em $\mathbb{S}^{n-1} \times (0, \pi)$, pela métrica canônica de $\mathbb{S}^n$, dada pela restrição da métrica canônica de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $dt^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$ à $\mathbb{S}^n$, é dada por $dr^2 + \sin^2 r ds_{n-1}^2$, onde ds_{n-1}^2 é a métrica canônica de $\mathbb{S}^{n-1}$, que é a restrição da métrica Euclideana $dz_1^2 + \cdots + dz_n^2$ à $\mathbb{S}^{n-1}$. Deduza que os meridianos são geodésicas de $\mathbb{S}^n$.

   OBS: Uma consideração análoga pode-se fazer para as métricas $dt^2 + \sin^2 t\, ds_p^2 + \cos^2 t\, ds_q^2$ em $\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q \times (0, \pi/2)$, considerando a aplicação $\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q \times (0, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{q+1}$, $(x, y, t) \mapsto (x \cdot \sin t, y \cdot \cos t)$. Tais métricas são chamadas são chamadas de “warped products” (logo, a métrica canônica da esfera pode ser vista assim). Aqui ds_p^2, denota a métrica canônica da esfera $\mathbb{S}^p$.