

LISTA 7 DE GEOMETRIA DIFERENCIAL 2008

RICARDO SA EARP

Vamos continuar o nosso estudo sobre superfícies de \mathbb{R}^3 . Vamos explorar certas superfícies especiais, tais como superfícies mínimas, superfícies de curvatura média constante. Vamos explorar e aplicar conceitos importantes tais como equações das geodésicas, fluxo, fórmula do fluxo, princípio do máximo, dentre outros. Você deve fazer um paralelo comparativo com as superfícies de \mathbb{H}^3 para entender os conceitos, as fórmulas, os resultados que continuam válidos quando o ambiente é o espaço hiperbólico.

Primeiramente vamos fazer uma incursão pelas superfícies de \mathbb{R}^3 , tomando *parâmetros isotérmicos*, obtendo com esta ajuda alguns conceitos, fórmulas e resultados fundamentais da geometria das imersões. Considere S uma superfície imersa em \mathbb{R}^3 . Considere $z = u + iv$ coordenadas isotérmicas locais em uma vizinhança de um ponto $p \in S$; isto é, $E = G$ e $F = 0$, onde E, F, G , são os coeficientes da primeira forma fundamental, relativos a uma parametrização conforme $X(z)$. Vamos denotar também $E = \lambda^2$. Sejam l, m, n , os coeficientes da segunda forma fundamental (Na notação proposta em sala de aula $e = l, f = m, g = n$). Vamos denotar $\{X_1, X_2\}$ o referencial local adaptado à X em p . Usaremos também a notação X_u para designar X_1 e X_v para designar X_2 .

- (1) Verifique a fórmula acima num paralelo da esfera \mathbb{S}^2 . Calcule a curvatura geodésica de um paralelo em termos do raio (geodésico), assim como em termos do raio Euclideo do paralelo.

Suponha que $\gamma(0) = p \in S$ e que $\gamma'(0) = v \in T_p S$.

Dizemos que um vetor tangente v a uma superfície S num ponto p de S é *assimptótico*, se a curvatura normal k_N nesta direção se anula. Uma curva assimptótica em S é uma curva regular tal que cada vetor tangente determina uma direção assimptótica.

Uma curva regular em S na qual cada reta tangente determina uma *direção principal*, i. e o vetor diretor é principal, é chamada de linha de curvatura.

Dizemos que um ponto p de S é *umbílico* se todas as curvaturas principais k_1 e k_2 de S são iguais em p , i. e $k_1(p) = k_2(p)$.

Dizemos que S é *totalmente umbílica* se todos os pontos de M são umbílicos.

Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular S , ou uma parametrização local de uma superfície regular S , em torno de um ponto p de S . Seja N um normal unitário ao longo de S .

Sejam, usando várias notações, $E = g_{11} = \langle X_u, X_u \rangle$, $F = g_{12} = \langle X_u, X_v \rangle$, $G = g_{22} = \langle X_v, X_v \rangle$ os coeficientes da primeira forma fundamental. Sejam $e = l = b_{11} = \langle N, X_{uu} \rangle$, $f = m = b_{12} = \langle N, X_{uv} \rangle$, $g = n = b_{22} = \langle N, X_{vv} \rangle$ os coeficientes da segunda forma fundamental (N é normal unitário à imersão X).

- (2) Use as equações de Codazzi-Mainardi para mostrar que se uma superfície regular conexa $S \subset \mathbb{R}^3$ é totalmente umbílica, então todas as curvaturas principais são iguais e constante. Classifique todas as superfícies completas totalmente umbílicas de \mathbb{R}^3 , fazendo uso da classificação das curvas planas de curvatura constante de \mathbb{R}^2 .
- (3) Estabeleça a equação das linhas de curvatura num sistema de coordenadas locais numa vizinhança de um ponto não umbílico:
Lembre-se que $\alpha(t)$ é uma linha de curvatura se

$$\bar{\nabla}_{\alpha'(t)} N = \lambda(t) \alpha'(t)$$

Usando uma parametrização local, escreva esta equação na forma matricial, em termo da primeira e segunda forma fundamentais, daí extraia uma equação diferencial chamada de *equação das linhas de curvatura*.

Deduza que as curvas coordenadas de uma parametrização são linhas de curvatura sse as matrizes da primeira e segunda forma fundamental (no referencial adaptado) são diagonais. Ou seja, nas várias notações $F = g_{12} = 0$ e $f = m = b_{12} = 0$. Deduza que os paralelos e os meridianos de uma superfície de revolução são linhas de curvatura.

- (4) Estabeleça a equação das linhas assintóticas num sistema de coordenadas locais.
- (5) Mostre que se v é um vetor assintótico, então ou a curvatura k de γ se anula em $s = 0$ ou \vec{n} é ortogonal à $N(p)$, onde \vec{n} é o unitário na direção de $\gamma''(s)$.

- (6) Mostre que se uma curva regular γ não é parametrizada pelo comprimento de arco então

$$k_N(t) = \frac{II(\gamma'(t), \gamma'(t))}{|\gamma'(t)|^2}$$

Vamos agora considerar o referencial de Darboux em vez do mais conhecido referencial de Frenet: Dada γ uma curva em S parametrizada pelo comprimento de arco s considere

$$T(s) = \gamma'(s), \quad \eta(s), \quad \nu(s) = T(s) \times \eta(s) = N(\gamma(s))$$

De fato, observe que

$$\nu'(0) = \frac{DN(\gamma(s))}{ds} \quad \text{em } s = 0$$

- (7) Mostre que existe uma função $\tau_g(s)$, chamada de torção geodésica, tal que

$$\begin{aligned} T'(s) &= k_g \eta + k_N \nu \\ \eta'(s) &= -k_g T + \tau_g \nu \\ \nu'(s) &= -k_N T - \tau_g \eta \end{aligned}$$

Note que como $\nu'(0)$ depende apenas de $T(0)$, a terceira equação acima mostra que k_N (o que já sabíamos de antemão) e τ_g dependem apenas de T ; podemos escrever que $k_N = k_N(v)$ e $\tau_g = \tau_g(v)$, para v unitário tangente.

- (8) Deduza das equações acima que se $\{v, w\}$, $v = \gamma'(0)$, é uma base ortornormal, positivamente orientada, de $T_p S$ então

$$\begin{aligned} k_N(v) &= -D_p N(v) \cdot v = II(v, v) \\ \tau_g(v) &= -D_p N(v) \cdot w = II(v, w) \end{aligned}$$

Aproveite o ensejo para re-demonstrar a relação de Euler

- (9) Mostre que se $e_1, e_2 \in T_p S$ são direções principais com $\{e_1, e_2\}$ uma base ortornormal positivamente orientada, se θ é o ângulo orientado que o vetor unitário v , à partir de e_1 , faz com e_1 , então

$$k_N(v) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$$

onde k_1, k_2 são as curvaturas principais de S em p .

- (10) Com as notações do item b) logo acima mostre que

$$\tau_g(v) = (k_2 - k_1) \sin \theta \cos \theta$$

Sugestão : Considere a equação obtida acima no item anterior

$$\tau_g(v) = -D_p N(v) \cdot w = II(v, w).$$

- (11) Deduza que γ é uma linha de curvatura, sse $\tau_g = 0$.
Dizemos que γ é uma *geodésica* se

$$\frac{D\gamma'(s)}{ds} \equiv 0$$

Segue das propriedades das geodésicas como veremos brevemente, a definição geométrica alternativa: “Geodésicas são curvas que minimizam localmente o comprimento de arco”, como já vimos explicitamente no modelo da esfera \mathbb{S}^2 ($K = 1$) e no modelo do plano hiperbólico \mathbb{H}^2 .

- (12) Estabeleça a equação das geodésicas num sistema de coordenadas locais.
- (13) Mostre que γ é uma geodésica, sse $k_g = 0$. (ou ainda, sse, \vec{n} quando definido é ortogonal à S .)
- (14) Mostre que os meridianos de uma superfície de revolução são geodésicas. Quais as condições para que um paralelo seja uma geodésica? Dê condições analíticas e geométricas.
- (15) Determine todas as geodésicas no cilindro circular reto, tanto de um ponto de vista analítico quanto de um ponto de vista geométrico. Aproveite o ensejo e determine o tipo conforme do cilindro circular reto e do semi-cilindro circular reto. Encontre ou descreva um cilindro topologicamente equivalente ao cilindro circular reto, mas que não seja conformemente equivalente a este.
- (16) Mostre que uma geodésica plana que não seja uma reta é uma linha de curvatura.
- (17) Mostre que uma geodésica que é linha de curvatura é uma curva plana.
- (18) Mostre que uma reta numa superfície S é uma linha assintótica; conclua que a curvatura de Gauss satisfaz $K \leq 0$ ao longo de qualquer reta contida em S . Mostre que $K = 0$ ao longo da reta, sse o normal N é constante ao longo da reta.
- (19) Mostre o teorema de Beltrami-Enneper: Se γ é uma curva assintótica de uma superfície S com $\gamma(0) = p$, $|\gamma'(0)| = 1$ e $k(0) \neq 0$, então

$$|\tau(0)| = \sqrt{-K(p)}$$

além disso, mostre que se $K(p) < 0$, e as duas curvas assintóticas distintas em p têm curvaturas diferente de zero em p , então suas torções em p são iguais e de sinais contrários.
Sugestão 1 :

Deduza que $\gamma''(0)$ é tangente à superfície. (Nota: Num vizinhança de um *ponto hiperbólico* pode-se encontrar coordenadas locais tais que as curvas coordenadas são *curvas assíntóticas*). Daí conclua que $\{\gamma', \vec{n} := \gamma''(0)/k(0)\}$ é um referencial ortornormal ao longo de γ (\vec{n} é o unitário na direção de $\gamma''(s)$), deduzindo a fórmula:

$$K = II(\gamma', \gamma')II(\vec{n}, \vec{n}) - II(\gamma', \vec{n})^2$$

Agora, conclua que o binormal \mathbf{b} à curva γ em \mathbb{R}^3 dado por $\mathbf{b} = T \times \vec{n}$ é normal unitário à superfície S , obtendo a fórmula desejada para K .

Sugestão2: Ou ainda, parametrize γ pelo comprimento de arco. Mostre que \vec{n} é tangente à S em p , e assim $N = \mathbf{b} = T \times \vec{n}$ (\vec{n} é o unitário na direção de $\gamma''(s)$) Mostre que

$$-DN(T(s)) = -\mathbf{b}'(s) = -\tau(s) \cdot \vec{n}$$

Veja que a matriz do operador de Weingarten $-DN : T_p S \rightarrow T_p S$ com respeito a base ortornormal $\{T(0), \vec{n}(0)\}$ deve ter zero na diagonal principal e $-\tau(0)$ na outra diagonal (Notação: $DN = \bar{\nabla}N$). Conclua que $K(p) = -\tau(0)^2$. Para completar a demonstração (e re-obter a fórmula pedida) use a relação de Euler obtida anteriormente e uma certa fórmula obtida anteriormente).

- (20) Demonstre o seguinte *teorema de Terquem-Joachimsthal*: Se γ é uma curva na interseção de duas superfícies S_1, S_2 que é uma linha de curvatura de S_1 ; então γ é uma linha de curvatura de S_2 , sse S_1 e S_2 se interceptam num ângulo constante ao longo de γ .

- (a) Aplique o teorema para demonstrar que os meridianos são linhas de curvatura de uma superfície de revolução.
 (b) Aplique o teorema para mostrar que γ é uma linha de curvatura plana de S , sse a imagem esférica pela aplicação normal de Gauss $N \circ \gamma$ descreve uma circunferência.

Agora vamos tratar de propriedades geométricas de certas superfícies de \mathbb{R}^3 .

- (21) Considere as superfícies abaixo:
- (a) Estude o comportamento da curvatura de Gauss K quando $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$, onde S está dada por
- $$z = \frac{x}{x^2 + y^2 + 2}$$
- (b) (*sela de macaco*) Calcule os coeficientes da segunda forma fundamental e mostre que a curvatura média e de Gauss

se anulam na origem:

$$z = x^3 - 3xy^2$$

- (c) (*pseudo-esfera*) Considere S , a superfície (*pseudo-esfera*) obtida pela revolução da parte da *tractrix* contida no primeiro quadrante aberto, em torno do eixo- y . Mostre que a curvatura de Gauss K de S é identicamente igual a -1 .
- (22) Investigue e classifique as superfícies de revolução de curvatura de Gauss $K \equiv +1$, fazendo uma análise geométrica de suas curvas geratrizes.
- (23) Investigue e classifique as superfícies de revolução de curvatura de Gauss $K \equiv -1$, fazendo uma análise geométrica de suas curvas geratrizes.
- (24) Considere a (*superfície mínima de Enneper*)

$$X(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right) \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

- (a) Mostre que os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por $E = G = (1 + u^2 + v^2)^2$, $F = 0$, e mostre que Enneper é completa.
- (b) Mostre que a superfície mínima de Enneper é globalmente conforme a \mathbb{C} , logo simplesmente conexa.
- (c) Calcule os coeficientes da segunda forma fundamental de Enneper.
- (d) Mostre que a superfície mínima de Enneper é de fato mínima, isto é de curvatura média $H = 0$.
- (e) Deduza que as linhas de curvatura de Enneper são curvas planas.
- (25) Mostre que o helicóide é globalment conforme a \mathbb{C} .
- (a) Mostre que as linhas coordenadas do helicóide são linhas assintóticas. Mostre que as linhas assintóticas do helicóide são retas e hélices circulares. Será que as linhas coordenadas são geodésicas? Estude o comportamento do normal unitário N ao helicóide ao longo das retas.
- (b) Mostre que o helicóide é uma superfície mínima.
- (c) Calcule a curvatura de Gauss do helicóide.
- (d) Mostre que as linhas de curvatura do helicóide são hélices logarítmicas.
- (26) Considere a *família catenóide-helicóide*, denotada \mathcal{F}_θ . abaixo (Você não precisa fazer os itens feitos por você num lista anterior).

$$\mathcal{Z}_\theta = \cos \theta \cdot \mathcal{C}(u, v) + \sin \theta \cdot \mathcal{H}(u, v) \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

onde $\mathcal{C}(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av)$ e $\mathcal{H}(u, v) = (-a \sinh v \sin u, a \sinh v \cos u, -av)$, $0 < u < 2\pi$, $-\infty < v < \infty$, são parametrizações (locais) do catenóide e do helicóide, respectivamente (Explique isto !).

- (a) Mostre que \mathcal{F}_θ é uma família a 1-parâmetro de superfícies helicoidais cujo passo depende de θ (Claro que para $\theta = 0$ obtemos o catenóide), ligando uma parte do catenóide à uma parte do helicóide.
- (b) Mostre \mathcal{F}_θ é uma família a 1-parâmetro de superfícies *mínimas* isométricas, ligando uma parte do catenóide à uma parte do helicóide. Dizemos que \mathcal{Z}_θ , $\theta \in (0, 2\pi)$ é uma *superfície associada* ao catenóide (helicóide).
- (c) Conclua que o catenóide e o helicóide são localmente isométricos e, por uma isometria local, geodésicas no catenóide são levadas em geodésicas no helicóide (desenhe-as usando o Maple).
- (d) Mostre que as linhas assintóticas do catenóide são hélices logarítmicas.
- (27) Considere S uma superfície imersa em \mathbb{R}^3 e seja N um campo de vetores normal (unitário) à S . A *superfície paralela* à S está definida por

$$S_t = S + tN$$

- (a) Mostre que nos pontos regulares da superfície a curvatura média H_t e a curvatura de Gauss K_t de S_t são dadas por

$$H_t = \frac{H - Kt}{1 - 2Ht + Kt^2} \quad K_t = \frac{K}{1 - 2Ht + Kt^2}$$

- (b) Assuma que H é uma constante positiva. Assuma que M é completa com curvatura de Gauss K limitada. Mostre que as curvaturas média H_t e de Gauss K_t satisfazem a seguinte relação de *Weingarten*

$$2aH_t + K_t = b, \quad a > 0, b \geq 0$$

para t suficientemente pequeno bem escolhido.

- (c) Mostre ainda que, nas hipóteses do item i), quando $H = 0$ e $K \gg -\infty$, M_t é imersa quando t é suficientemente pequeno.
- (d) Dê um exemplo de um *fim* de uma superfície mínima tal que $K_t \rightarrow -\infty$, quando $p \rightarrow \partial S_t$.
- (e) Finalmente mostre que M_t é uma *superfície especial de Weingarten*, ou seja existe uma função de classe C^1 , f :

$[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que as curvaturas média e de Gauss satisfazem uma relação da forma

$$H_t = f(H_t^2 - K_t)$$

para f elíptica, i. e f satisfazendo

$$4t (f'(t))^2 < 1.$$

Conclua também que dentro de uma mesma classe de superfícies especiais de Weingarten existe uma bem determinada superfície totalmente umbílica.

- (f) Considere uma superfície imersa S em \mathbb{R}^3 orientada por campo de vetores normal unitário N . Assuma que a curvatura média H é positiva e assuma que S satisfaz uma relação de Weingarten da forma

$$2aH + K = b, \quad a > 0, b > 0$$

Que considerações e resultados análogos ao do item anterior você pode deduzir ?

- (28) Mostre que em parâmetros isotérmicas $z = u + iv$, tem-se que: A curvatura média H e a curvatura de Gauss K de uma superfície S imersa em \mathbb{R}^3 são dados por

$$H = \frac{l + n}{2E} \quad \text{e} \quad K = \frac{ln - m^2}{E^2}$$

Idem para uma superfície S imersa em \mathbb{H}^3 .

- (29) Deduza que equação das linhas de curvatura via o método dos multiplicadores de Lagrange, e infira que em coordenadas isotérmicas a equação das linhas de curvatura é dada por

$$-m du^2 + (l - n) du dv + m dv^2 = 0$$

- (30) Mostre as equações de Codazzi-Mainardi:

$$\begin{aligned} l_v - m_u &= \frac{E_v}{2E}(l + n) \\ m_v - n_u &= -\frac{E_u}{2E}(l + n) \end{aligned}$$

Conclua

- (31) As equações de Codazzi-Mainardi podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \left(\frac{l - n}{2}\right)_u + m_v &= EH_u \\ \left(\frac{l - n}{2}\right)_v - m_u &= -EH_v \end{aligned}$$

Sugestão : Parta dos termos a esquerda das equações propostas substituindo os termos pelas definições , em seguida use o fato de que N é normal unitário, X_u e X_v tangentes ortogonais e de mesmo módulo, aplicando simetria e compatibilidade com a métrica, para chegar ao resultado desejado.

- Deduza
 (32) Se $\phi = \frac{l-n}{2} - im$, as equações de Codazzi tomam a forma complexa

$$\phi_{\bar{z}} = EH_z$$

A equação (ou as equações) de Codazzi-Mainardi são as mesmas no espaço hiperbólico. Verifique isto ! onde $2\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}$, e $2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}$. Infira que S tem curvatura média constante, sse ϕ é holomorfa. Mostre que isto implica que os pontos umbílicos de uma superfície conexa S imersa em \mathbb{R}^3 de curvatura média contante são isolados ou S é totalmente umbílica. Mostre o mesmo para uma superfície de curvatura média constante imersa em \mathbb{H}^3 .

- (33) Mostre ainda que as linhas de curvatura são dadas pela equação

$$\Im (\phi \cdot (dz)^2) = 0$$

Nota: Um fato que pode ser demonstrado é que quando S (conexa) tem curvatura média constante, o índice do campo de linhas de curvatura num ponto singular (i. e num ponto umbílico, necessariamente isolado, se S não é totalmente umbílica) é estritamente negativo. Segue disto, e do teorema de Poincaré-Hopf, o seguinte teorema de Hopf demonstrado nos meados do século vinte. Tal resultado deu um novo impulso à teoria das superfícies de curvatura média constante: *Se uma superfície fechada imersa S em \mathbb{R}^3 (não necessariamente mergulhada), topologicamente equivalente a esfera , tem curvatura média constante então S é uma esfera geométrica.* Enuncie e demonstre o correspondente teorema de Hopf no espaço hiperbólico.

- (34) Mostre que quando S tem curvatura média constante a diferencial holomorfa quadrática

$$\phi \cdot (dz)^2$$

está globalmente bem definida em S , i. e não depende das escolhas dos parâmetros isotérmicos.

(35) Mostre a seguinte fórmula

$$\Delta X = 2 \vec{H}$$

onde \vec{H} ó vetor curvatura média de S (Note que você pode interpretar X como sendo o vetor posição de S).

Conclua a seguinte caracterização das superfícies mínimas:

$$S \text{ é mínima} \iff \Delta X = 0$$

Ou seja S é mínima, sse as coordenadas de S em \mathbb{R}^3 em parâmetros isotérmicos são funções harmônicas.

(36) A idéia agora é enfocar o seguinte: Sejam k_1, τ_1, k_2, τ_2 as curvaturas e torções de duas linhas de curvatura (curvatura e torção destas curvas como sendo curvas de \mathbb{R}^3 !) passando por um ponto não umbílico de uma *imersão mínima conforme* $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, (U aberto de \mathbb{R}^2) ($E = G, F = 0$). Então demonstre o *teorema de Enneper* deduzindo a seguinte fórmula

$$k_1^2 \tau_1 = k_2^2 \tau_2$$

Sugestão : Considere os parâmetros isotérmicos $z = u + iv$, i . e $X = X(z)$. Admita o fato que estes parâmetros podem ser escolhidos (nas vizinhanças de um ponto não umbílico) de forma que as linhas coordenadas sejam linhas de curvatura. Mostre que isto implica que $m = 0$ e que as equações de Codazzi-Mainardi ficam ($F = m = 0$)

$$l_v = \frac{E_v}{2} \left(\frac{l}{E} + \frac{n}{G} \right)$$

$$n_u = \frac{G_u}{2} \left(\frac{l}{E} + \frac{n}{G} \right)$$

Donde conclua que $l = -n = b$, $b \in \mathbb{R}$ (constante). Em seguida use as fórmulas da curvatura e da torção

$$\tau_1 k_1^2 = - \frac{X_u \times X_{uu} \cdot X_{uuu}}{|X_u \times X_{uu}|^2} \cdot \frac{|X_u \times X_{uu}|^2}{|X_u|^6}$$

Para concluir escreva $X_u \times X_{uu} \cdot X_{uuu}$ em termo das derivadas parciais de E com respeito a u e v . Daí segue o resultado desejado.

(37) Deduza do teorema de Enneper acima a seguinte proposição : Se uma família de linhas de curvatura de uma superfície mínima é constituída por curvas planas, assim também o é a família de linhas de curvatura ortogonal, numa vizinhança de um ponto não umbílico. Nota: As superfícies mínimas (não planas) cujas

linhas de curvatura são curvas planas foram classificadas : Estas são o catenóide, a superfície mínima de Enneper e as superfícies de Bonnet.

* * *

Vamos continuar o nosso estudo sobre superfícies de \mathbb{R}^3 . Vamos explorar certas superfícies especiais, tais como superfícies mínimas, superfícies de curvatura média constante. Vamos explorar e aplicar conceitos importantes tais como equações das geodésicas, fluxo, fórmula do fluxo, princípio do máximo, dentre outros. Você deve fazer um paralelo comparativo com as superfícies de \mathbb{H}^3 para entender os conceitos, as fórmulas, os resultados que continuam válidos quando o ambiente é o espaço hiperbólico.

Primeiramente vamos fazer uma incursão pelas superfícies de \mathbb{R}^3 , tomando *parâmetros isotérmicos*, obtendo com esta ajuda alguns conceitos, fórmulas e resultados fundamentais da geometria das imersões . Considere S uma superfície imersa em \mathbb{R}^3 . Considere $z = u + iv$ coordenadas isotérmicas locais em uma vizinhança de um ponto $p \in S$; isto é, $E = G$ e $F = 0$, onde E, F, G , são os coeficientes da primeira forma fundamental, relativos a uma parametrização conforme $X(z)$. Vamos denotar também $E = \lambda^2$. Sejam l, m, n , os coeficientes da segunda forma fundamental (Na notação proposta em sala de aula $e = l, f = m, g = n$). Vamos denotar $\{X_1, X_2\}$ o referencial local adaptado à X em p . Usaremos também a notação X_u para designar X_1 e X_v para designar X_2 .

- (1) O gradiente, a divergência e o Laplaciano. Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real suave definida em S . Define-se o *gradiente* de f , denotado por ∇f como sendo o campo de vetores tangentes à S satisfazendo

$$\nabla f \cdot v = df_p(v)$$

onde v é tangente à S em p , isto é $v \in T_p S$.

- (2) Mostre que

$$\nabla f = \frac{f_u}{E} X_u + \frac{f_v}{E} X_v$$

onde cometemos o abuso de notação usual identificando $f(u, v)$ com $f \circ X(u, v)$.

- (3) Define-se a *divergência* de um campo Y de vetores tangentes à S (i. e $Y(p) \in T_p S$), denotada por div , como sendo o traço da aplicação $Z \rightarrow D_Z Y$, onde Z é um campo de vetores tangentes à S , e D é a conexão Riemanniana de S . Ou seja,

$$\text{div } Y = \text{tr} (Z \rightarrow D_Z Y)$$

(4) Mostre

$$\operatorname{div} Y = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial}{\partial u} (Y \cdot X_u) + \frac{\partial}{\partial v} (Y \cdot X_v) \right)$$

(5) Define-se o *Laplaciano* de uma função real suave f definida em S , denotado por Δf , como sendo

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f$$

(6) Mostre

$$\Delta f(p) = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial v^2} \right)$$

onde cometemos o abuso de notação identificando $f(u, v)$ com $f \circ X(u, v)$.

(7) Mostre que os conceitos de gradiente, divergência e Laplaciano pertence à *geometria intrínseca das superfícies*, ou seja dependem apenas da primeira forma fundamental e podem por isto ser definidos numa superfície Riemanniana qualquer. Assim o Laplaciano definido acima é também chamado de *Laplaciano Riemanniano*.

(8) Consideremos S munida de sua estrutura de superfície de Riemann (induzida pela métrica de S). Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real suave. o *Laplaciano conforme relativo à coordenada conforme z* está definido como

$$\Delta_z f = f_{uu} + f_{vv}$$

(9) Mostre que a definição de Laplaciano conforme depende da coordenada isotérmica z , uma função mas a noção de f ser harmônica na superfície de Riemann não depende. Além disso mostre que esta noção de harmonicidade é a mesma considerando o Laplaciano Riemanniano definido no item anterior.

Um importante teorema da Geometria é o *teorema da divergência*: Seja S uma superfície Riemanniana suave e seja Y um campo suave de vetores tangentes à S . O teorema da divergência (intrínseco) diz o seguinte

$$\int_S \operatorname{div} Y \, dA = - \int_{\partial S} Y \cdot \eta \, ds$$

onde $dA = \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$ é o elemento de área de S , ∂S é o bordo de S , ds é o elemento comprimento de arco de ∂S , e η é o vetor co-normal *interior* ao longo de ∂S (η é tangente à S , normal à ∂S , apontando para dentro de S).

- (10) Considere X como sendo o vetor posição de uma superfície orientada S em \mathbb{R}^3 , por um campo de vetores normais unitários N ao longo de S . Suponha que ∂S seja uma curva (regular) simples fechada γ contida no plano- xy , de modo que $\gamma = \partial D$ onde $D \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio de Jordan. Suponha que $S \cup D$ é um ciclo orientável, de modo que $S \cup D = \partial V$, onde V é um “sólido” de \mathbb{R}^3 , e o teorema da divergência se aplica (Faça uma figura!). Seja $\Delta_{\mathbb{R}^3}$ o Laplaciano usual de \mathbb{R}^3 . Mostre que

$$6\text{vol}(V) + 2 \int_S X \cdot N \, dA = 0$$

Sugestão : Aplique corretamente o teorema da divergência (em \mathbb{R}^3) Mostre que

$$\Delta|X|^2 = 4 + 4HX \cdot N$$

- (11) Aplique agora o teorema da divergência em S mostrando que

$$\int_S \Delta|X|^2 \, dA = -2 \int_{\partial S} X \cdot \eta \, ds$$

onde η é o co-normal interior ao longo do bordo de S .

- (12) Levando em conta os resultados obtidos nos itens anteriores deduza que

$$4 \text{área}(S) + 4H \int_S X \cdot N \, dA = -2 \int_{\partial S} X \cdot \eta \, ds$$

- (13) Juntando os resultados obtidos nos itens anteriores infira

$$2 \text{área}(S) = 6H \text{vol}(M) - \int_{\partial S} X \cdot \eta \, ds$$

- (14) (*Fluxo numa superfície mínima*). Suponha agora que S seja uma superfície mínima em \mathbb{R}^3 , orientada por um campo de vetores normal unitário N ao longo de S . Seja ν o co-normal exterior ao longo de ∂S .

Seja W um campo de vetores suaves em \mathbb{R}^3 . Considere a componente tangencial W^T de W , ou seja a projeção ortogonal de W no plano tangente à S . Mostre que

$$W^T = W - (W \cdot N)N$$

- (15) Seja v um campo constante em \mathbb{R}^3 . Mostre que v^T é o gradiente de uma função harmônica que é a restrição à S de uma função linear em \mathbb{R}^3 . *Sugestão* : Você vai precisar do fato que as coordenadas dos pontos de uma superfície mínima em \mathbb{R}^3

em parâmetros isotérmicos são funções harmônicas: Veja logo adiante. Mostre ainda que segue do teorema da divergência a seguinte equação vetorial

$$\int_{\partial S} \nu \, ds = 0$$

Conclua que para curvas fechadas γ , tem-se que $\int_{\gamma} \nu \, ds$, é um invariante de homologia.

O *fluxo ao longo de γ* está definido pela quantidade

$$\text{Fluxo}([\gamma]) := \int_{\gamma} \nu \, ds$$

- Considere uma superfície de revolução com eixo z e curva geradora C contida no plano yz , parametrizada por $(r(t), t)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$. Considere a porção da superfície entre os planos horizontais $z = t_1$, $z = t_2$, cujo bordo consiste de dois círculos horizontais de raios $r(t_1)$ e $r(t_2)$, respectivamente. Seja $\nu = (0, 0, 1)$ o vetor vertical canônico. Calcule o *fluxo vertical* e obtenha a seguinte equação diferencial $r(t) \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} = \text{cte}$. Conclua que a superfície é um catenóide.

Nota: Lembremos que a curvatura de Gauss K de uma superfície mínima S é sempre não positiva. A curvatura total denotada por $C(S)$ está definida por

$$C(S) := \int_S K \, dA$$

Um resultado interessante é o seguinte: Se uma superfície mínima completa mergulhada de curvatura total finita em \mathbb{R}^3 , tem *fluxo vertical* (i. e o *fluxo*, $\text{Fluxo}([\gamma])$), é um vetor vertical para toda curva fechada $\gamma \subset S$, então S é o plano ou catenóide. Nota: A curvatura total pode ser interpretada como a imagem esférica da aplicação normal de Gauss. De modo que quando a curvatura total é finita vale a seguinte fórmula:

$$C(S) = -4\pi n$$

onde n é o grau da aplicação normal de Gauss. Quando a curvatura total é finita segue de um teorema de Huber que S é conformemente equivalente a uma superfície de Riemann compacta \bar{S} de gênero g , removido um conjunto finito de pontos,

chamados *puncture*. Os dados meromorfos $(g, f dz)$ se estendem meromorficamente à \bar{S} (*Teorema de Osserman*).

Vamos em seguida abordar a famosa *representação de Weierstrass* das superfícies mínimas.

- (16) Seja S o catenóide
- Mostre que a única geodésica fechada de S é o paralelo contido no plano de simetria de S .
 - Mostre por um argumento simples e direto que S não tem pontos umbílicos, mas que S é assintoticamente umbílica, i. e. $k_1(p) - k_2(p) \rightarrow 0$, quando $|p| \rightarrow \infty$, onde k_1, k_2 são as curvaturas principais de S .
 - Aplice o teorema de Gauss-Bonnet e estude o comportamento assintótico numa metade do catenóide (cortado ao longo da geodésica representante da classe de homologia do fim que minimiza o comprimento de arco), para mostrar que a curvatura total do catenóide é -4π . Nota: Como já comentamos, a curvatura total de uma superfície mínima de curvatura total finita é $-4\pi n$, sendo n o grau da aplicação normal de Gauss. No caso do catenóide é imediato verificar que $n = 1$.

* * *

- (17) Equações de curvatura de Gauss e Codazzi-Mainardi em coordenadas locais em espaços de formas (pense no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1}).

Seja \bar{M} um espaço de curvatura seccional constante c de dimensão $n + 1$ (Se \bar{M} é simplesmente conexo e completo, então $\bar{M} = \mathbf{R}^{n+1}$, se $c = 0$, \mathbf{S}^{n+1} , se $c = 1$ e \mathbf{H}^{n+1} , se $c = -1$). Seja M uma hipersuperfície imersa em \bar{M} .

- (a) Mostre que para $\bar{M} = \mathbf{R}^{n+1}$ as equações de curvatura de Gauss e Codazzi-Mainardi são dadas em um sistema de coordenadas x_1, \dots, x_n de M com referencial local adaptado X_1, \dots, X_n são dadas respectivamente por

$$R_{ijk}^m = \sum_s g^{ml} (l_{ik} \cdot l_{js} - l_{jk} \cdot l_{is}) \quad (\text{eq. de curvatura de Gauss})$$

onde l_{ij} são os coeficientes da segunda forma fundamental de M . Expresse os símbolos R_{ijk}^m (definidos no curso) em termos dos símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k de M .

$$\frac{\partial l_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial l_{ij}}{\partial x_k} = \sum_s (l_{ks} \cdot \Gamma_{ij}^s - l_{sj} \cdot \Gamma_{ik}^s) \quad (\text{eqs. de Codazzi})$$

Quando $n = 2$ mostre que as equações de Codazzi são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial x_2} + \sum_s (\Gamma_{12}^s \cdot l_{s1} - \Gamma_{11}^s \cdot l_{s2}) &= 0 \\ \frac{\partial l_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial l_{21}}{\partial x_2} + \sum_s (\Gamma_{22}^s \cdot l_{s1} - \Gamma_{21}^s \cdot l_{s2}) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

(b) Seja A o operador de Weingarten que representa a segunda forma fundamental de M . Seja e_1, \dots, e_n um referencial geodésico em $p \in M$, definido numa vizinhança de p . Seja (a_{ij}) a matriz de A neste referencial geodésico. Seja $\bar{\nabla}$ a conexão de \bar{M} . Mostre que em p vale

$$\bar{\nabla}_{e_k} a_{ii}(p) = \bar{\nabla}_{e_i} a_{ik}(p) \quad i, k \in \{1, \dots, n\}$$

(c) Toda superfície M de classe C^1 possui coordenadas isotérmicas $z = u + iv$ em torno de qualquer ponto $p \in M$. Ou seja numa vizinhança de p a métrica é dada por $ds^2 = E \cdot (du^2 + dv^2)$. Suponha que M seja uma superfície suave imersa num espaço de formas tridimensional \bar{M} , i.e $M \looparrowright \bar{M}$, munida de coordenadas isotérmicas $z = u + iv$. Mostre que se l, m, n denotam os coeficientes da segunda forma fundamental neste sistema de coordenadas, e H, K_e denotam as curvaturas média e de Gauss extrínseca de M :

$$(i) \quad K_e = \frac{l \cdot n - m^2}{E^2} \text{ e } H = \frac{l + n}{2E}.$$

(ii) As linhas de curvatura são dadas por

$$-m \cdot du^2 + (l - n) \cdot dudv + m \cdot dv^2 = 0$$

(iii) As equações de Codazzi são dadas por

$$\left(\frac{l-n}{2}\right)_u + m_v = E \cdot H_u \left(\frac{l-n}{2}\right)_v - m_v = -E \cdot H_v$$

(iv) Conclua que $H = \text{const}$, $\Leftrightarrow \phi(z) := \frac{l-n}{2} - im$ é holomorfa.

Conclua também que os pontos umbílicos de uma superfície de curvatura média constante em \bar{M} são isolados ou a superfície é totalmente umbílica.

(v) Mostre que a equação de curvatura de Gauss pode ser escrita:

$$\frac{-\Delta \log \sqrt{E}}{E} := K = \frac{l \cdot n - m^2}{E^2} + c \quad K = \text{curv. de Gauss.}$$