PROVA 1 DE GEOMETRIA DIFERENCIAL 2008

PROFESSOR RICARDO SA EARP

ESCREVA CORRETAMENTE E CLARAMENTE TODOS OS DESENVOLVIMENTOS NA PROVA COM RIGOR LÓGICO E JUSTIFICATIVA.

(1) Considere a curva parametrizada diferenciável $\alpha : (-1,1) \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (f(t), g(t))$, onde
$f(t) := \dfrac{t^3}{(t+1)^2(t-1)}$, e $g(t) := \dfrac{t^2}{t^2-1}$, para $t \in (-1,1)$.

Considere o traço da curva esboçado na Figura 1 abaixo, assumindo que tenha sido plotado usando o MAPLE :

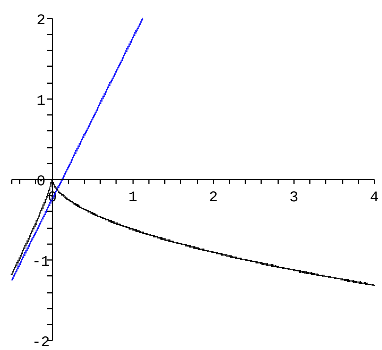

Figure 1

(a) (**1** pt) Responda verdadeiro ou falso à afirmação, explicando matematicamente, corretamente e até mesmo graficamente (o primeiro item) a sua resposta:
A curvatura com sinal da curva para $t \in (-1,0)$ é positiva.

A sua resposta neste item deve ser justificada por uma análise geométrica obrigatoriamente, se aproveitando (em parte) da figura, <u>sem fazer o cálculo da curvatura</u>.

(b) (**2** pts) A figura sugere que a origem é uma cúspide. Além disso, a figura sugere que existe uma reta assímptota, esboçada pela graça do professor.
Deduza estes dois fatos, dando o argumento correto que justifique os seus cálculos e conclusões, se aproveitando (se quiser) da seguinte conta:

$$\frac{g(t)}{f(t)} = 1 + \frac{1}{t}$$

(2) Neste item você vai deduzir o *princípio de comparação para curvas planas num ponto.*
Sejam $\alpha : (-1,1) \to \mathbb{R}^2, \beta : (-1,1) \to \mathbb{R}^2$ duas curvas parametrizadas regulares planas, passando para $t = 0$ no mesmo ponto com o mesmo vetor velocidade. Sejam $n_a(0)$ e $n_\beta(0)$ os normais unitários canônicos à α e β em $t = 0$, respectivamente (definidos em sala de aula).

Sejam k_α e k_β as curvaturas com sinal de α e β, respectivamente.

Lembre-se que *dizemos que α está acima de β em p se existe uma vizinhança de $t = 0$ tal que* $(\alpha(t) - \alpha(0)) \cdot n_\alpha(0) \geqslant (\beta(t) - \beta(0)) \cdot n_\beta(0)$, *para todo t nesta vizinhança.*

(a) (**1** pt) Deduza que se α está acima de β, então $k_\alpha(0) \geqslant k_\beta(0)$.
(b) (**1** pt) Se $k_\alpha(0) > k_\beta(0)$ então α está acima de β.
(c) Responda verdadeiro ou falso às afirmações abaixo, explicando matematicamente e corretamente a sua resposta:
   (i) (**0**.5 pt) Se $k_a(0) \geqslant k_\beta(0)$ então α está acima de β.
   (ii) (*Ponto extra*) Assuma que $\alpha(t) = (t, f(t))$ e $\beta(t) = (t, g(t))$ são gráficos suaves de duas funções inteiras $f(t), g(t)$ (definidas para $\forall t \in \mathbb{R}$) que passam para $t = 0$ tangencialmente na origem de $\mathbb{R}^2$ (são tangentes na origem). Assuma que satisfazem $k_\alpha(0) > k_\beta(0)$ e que $k_a(t) \geqslant k_\beta(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
   Segue então que α está globalmente acima de β.

(3) (**2** pts) Seja $\alpha : (-1,1) \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada regular pelo comprimento de arco s. Assuma que $k(s) > 0$, $\forall s \in (-1,1)$. Deduza que se todas as retas normais à α são eqüidistantes de um ponto fixado então o traço da *evoluta* de α é certa curva clássica que você deve determinar.

(4) (**2.5** pts) Seja $\kappa(s) = \dfrac{a}{a^2 + s^2}$, $a > 0$. Deduza que todas as curvas do plano, parametrizadas pelo comprimento de arco s,

que tem curvatura $\kappa(s)$, a menos de uma isometria de $\mathbb{R}^2$, são as *catenárias* dadas por $y = \cosh(x)$, $x \in \mathbb{R}$ ou homotetias desta com respeito a origem.

(*Ponto extra*) Além disso, deduza que toda esta *família catenária* obtida da catenária dada fazendo as homotetias com respeito a origem, estão contidas num setor $\mathcal{S}_{\theta_0}$ da forma $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi - \theta_0$ para certo $\theta_0 > 0$, satisfazendo a seguinte propriedade: Qualquer setor $S_{\theta_{0_\varepsilon}}$ contido propriamente em $\mathcal{S}_{\theta_0}$, i.e $S_{\theta_{0_\varepsilon}}$ está dado por $\theta_0 + \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \theta_0 - \varepsilon$, para ε "pequeno", não contém nenhum membro da família catenária.

(5) (*Ponto extra*). Seja $\alpha : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada regular de classe C^2 até o bordo. Suponha que $\alpha(-1) = (0, -1)$ e que $\alpha(1) = (0, 1)$. Assuma que α seja um gráfico horizontal dada por uma função $x = f(y)$ sendo f contínua em $[-1, 1]$ e diferenciável de classe C^2 em $(-1, 1)$. Assuma que a curvatura geométrica k de α satisfaça $k \geqslant 1$.

Deduza que o traço de α é um semi-círculo de raio 1.