INTRODUÇÃO ÀS SUPERFÍCIES COM CURVATURA MÉDIA 1 NO ESPAÇO HIPERBÓLICO -2001.1– Lista1

Professor: Ricardo Sá Earp

1) Considere a *prima do catenóide*, com eixo z de revolução . Sabe-se que a curva geratriz γ tem como *eixo* de simetria uma geodésica, digamos β, de $\mathbb{H}^2$ que corta ortogonalmente o eixo z; além disso, o bordo assimptótico de γ é dado pela origem e pelo ∞. Assuma que $\gamma = \gamma(r, z)$ é mergulhada (ou seja, gera uma prima mergulhada). É sabido também que no ∞, γ é um gráfico em relação ao eixo r e possui o seguinte comportamento assimptótico $\approx c\, r^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ (veja refs. 12 e 16). Seja $\mathcal{C}_n$ o semi-círculo contido em $\mathbb{H}^2$, cujo centro é a origem e de raio r_n, com $r_n \to 0$, quando $n \to \infty$. Seja $\{p_n\}$ a interseção de $\mathcal{C}_n$ com o horociclo único cujo bordo assimptótico é a origem, passando pela interseção do traço de β (eixo de simetria γ) com o eixo z. Seja $\{q_n\}$ a interseção de $\mathcal{C}_n$ com o traço de γ. Mostre que $\mathrm{dist}(p_n, q_n) \to \infty$, quando $n \to \infty$.
2) Sejam Π_1 e Π_2 dois planos totalmente geodésicos de $\mathbb{H}^3$. Calcule $\mathrm{dist}(\Pi_1, \Pi_2)$, analisando os vários casos.
3) Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ dois horociclos tangentes na origem. Mostre que a família de geodésicas γ que saem de 0 corta ortogonalmente $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, respectivamente determinando uma distância constante. Generalize este resultado para horosferas de $\mathbb{H}^3$.
4) Mostre de duas maneiras distintas que $\mathbb{H}^3$ é uma variedade Riemanniana completa de curvatura seccional -1.
5) Seja $\mathcal{C}$ uma curva propriamente mergulhada, tal que $\partial_\infty \mathcal{C} = \{p\}$. Mostre que se $\mathcal{C}$ é simétrica com respeito à família de geodésicas que saem de p, então $\mathcal{C}$ é um horociclo. Enuncie e demonstre um resultado análogo para superfícies propriamente mergulhadas em $\mathbb{H}^3$ cujo bordo assimptótico consiste de um ponto.
6) Lembremos primeiramente da *transformação de Koebe h*. Seja f uma função holomorfa e univalente definida no disco unitário aberto $\mathcal{D} = \{|z| < 1\}$. Seja

$z_0 \in \mathcal{D}$, então h está definida por

$$h(z) := \frac{f\left(\dfrac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2)\,f'(z_0)} = z + \left(\frac{1}{2}\left(1-|z_0|^2\right)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \overline{z_0}\right)z^2 + \cdots$$

Note que f pertence a classe $\mathcal{S}$ (*schlicht functions*) consistindo das funções analíticas e univalentes em $\mathcal{D}$ da forma

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

Lembremos ainda a conjectura de Bieberbach demonstrada por de Branges em 1985 que diz o seguinte

$$(B) \qquad |a_n| \leqslant n \quad \text{para} \quad f \in \mathcal{S}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Daí e da transformação de Koebe segue imediatamente que se f leva conformemente $\mathcal{D}$ em $\mathbb{C}$ então

$$(*) \qquad \left|\left(1-|z|^2\right)\frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\overline{z}\right| \leqslant 4, \qquad \text{para} \quad z \in \mathcal{D}$$

A classe Σ consiste das funções $g(z)$ definidas no disco perfurado $\mathcal{D}^*$ satisfazendo

$$g(\zeta) = \zeta + b_0 + b_1\zeta^{-1} + \cdots (|\zeta| > 1)$$

a) Mostre que a igualdade em (B) vale para a função de Koebe $f_0(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$. Estude a função de Koebe f_0 mostrando que a imagem por f_0 de $\mathcal{D}$ contém a bola aberta $\mathcal{B}$ de raio $1/4$ centrada na origem. Esta é uma propriedade satisfeita por todas as funções *schlicht*. No caso da função de Koebe $f_0(z)$ tal bola $\mathcal{B}$ é extremal ?

b) Mostre que se $f \in \mathcal{S}$ então $g(\zeta) := 1/f(\zeta^{-1})$satisfaz

$$g(\zeta) = \zeta - a_2 + (a_2^2 - a_3)\zeta^{-1} + \cdots (|\zeta| > 1)$$

concluindo que g pertence a Σ e que omite 0. Reciprocamente, mostre que se $g \in \Sigma$ e $g(\zeta) \neq 0$ para $\zeta \in \mathcal{D}^*$, então

$$f(z) = 1/g(z^{-1}) = z - b_0 z^2 + \left(b_0^2 - b_1\right) z^3 + \cdots (|z| < 1)$$

pertence à $\mathcal{S}$.

c) Mostre o *teorema da área*

$$\operatorname{area}(\mathbb{C}\setminus g(\mathcal{D}^*)) = \pi\left(1-\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2\right) \qquad \text{para } \ g\in\Sigma$$

inferindo

$$|b_1| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leqslant 1 \qquad \text{para } \ g\in\Sigma$$

Nota : Segue do teorema da área o caso particular do teorema de de Branges $|a_2| \leqslant 2$.

d) Mostre que se f é uma função schlicht então $|a_2^2 - a_3| \leqslant 1$. Deduza daí que se f leva conformemente $\mathcal{D}$ em $\mathbb{C}$, então a derivada Schwarziana S_f de f satisfaz

$$|S_f(z)| \leqslant 6\left(1-|z|^2\right)^{-2}$$

onde $S_f(z) := \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\dfrac{f''(z)}{f'(z)} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$

7) Considere o *teorema de distorção de Koebe*: Seja $f : \mathcal{D}\to\mathbb{C}$ uma aplicação conforme que leva $\mathcal{D}$ no plano complexo $\mathbb{C}$. Para $z\in\mathcal{D}$ valem as seguinte desigualdades

$$|f'(0)|\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leqslant |f(z)-f(0)| \leqslant |f'(0)|\frac{|z|}{(1-|z|)^2} \tag{2}$$

$$|f'(0)|\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant |f'(0)|\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3} \tag{3}$$

que pode ser demonstrado integrando-se a equação $(*)$ duas vezes. Mostre isto !!

Vamos definir agora $d_f(z) = \operatorname{dist}(f(z), \partial f(\mathcal{D}))$, (distância Euclideana de $f(z)$ ao bordo de $f(\mathcal{D})$. Claro que $d_f(z_0) = \liminf\limits_{|\zeta|\to 1} |f(\zeta) - f(z_0)|$.

a) Seja novamente h a transformação de Koebe. Usando (2) e o princípio do mínimo mostre que

$$\frac{1}{4} \leqslant \liminf_{|z|\to 1}\left|\frac{h(z)}{z}\right| \leqslant |h'(0)| = 1$$

Conclua

b) Se f leva $\mathcal{D}$ conformente em $\mathbb{C}$ então

$$\frac{1}{4}\left(1-|z|^2\right)|f'(z)| \leqslant d_f(z) \leqslant (1-|z|^2)|f'(z)| \qquad \text{para} \;\; z \in \mathcal{D}$$

Tire as seguintes consequências: Primeiramente, mostre que se f leva $\mathcal{D}$ conformemente sobre um domínio limitado, então $(1-|z|)|f'(z)| \to 0$ (quando $|z| \to 1$). Segundo, mostre que se f leva conformemente $\mathcal{D}$ em $\mathbb{C} \setminus \{c\}$, com f satisfazendo $f(0)=0$, então

$$|f(z)| \leqslant \frac{4|cz|}{(1-|z|)^2} \qquad z \in \mathcal{D}$$

c) Considere a métrica em $f(\mathcal{D})$ dada por

$$\mathrm{d}s = \frac{1}{d_f(z)}|\,\mathrm{d}w|$$

onde $w = f(z) \in f(\mathcal{D})$.

i) Mostre usando o item anterior que $\mathrm{d}s$ é completa, dando a relação entre $\mathrm{d}s$ e a métrica hiperbólica (completa) em $f(\mathcal{D})$.

Vamos definir o conceito de família normal:

1) Uma família $\mathcal{F}$ de funções holomorfas de uma superfície de Riemann S para uma superfície de Riemann *compacta* T é chamada de normal, se $\mathcal{F}$ é compacta; ou seja, toda seqüência de funções $\{f_n\} \in \mathcal{F}$, contém uma subseqüência que converge uniformemente em compactos a uma função $g:\; S \to T$, holomorfa.

2) O caso não compacto é lidado da seguinte maneira: Dizemos que uma seqüência de pontos q_n numa superfície de Riemann não compacta T diverge a ∞ em T, se para cada compacto $K \subset T$, $p_n \notin K$, para n suficientemente grande. Dizemos que uma seqüência de aplicações $f_n : S \to T$ *diverge uniformemente em compactos ao* ∞ em T, se para cada compacto $K \subset S$ e $K' \subset T$, temos que $f_n(K) \cap K' = \emptyset$, para n suficientemente grande. Uma família $\mathcal{F}$ de aplicações holomorfas é chamada de normal, se toda seqüência $f_n : S \to T$ em $\mathcal{F}$, admite uma subseqüência que converge uniformemente em compactos de S, ou uma subseqüência que diverge uniformemente em compactos ao ∞.

8) Mostre que se S e T são duas superfícies de Riemann hiperbólicas (o recobrimento universal conforme é $\mathcal{D}$), então cada família $\mathcal{F}$ de funções holomorfas de S em T é normal.
9) Usando o item anterior, ou algum argumento direto que faça uso da geometria hiperbólica, mostre que se S é uma superfície de Riemann hiperbólica e $\mathcal{F}$ uma família de funções holomorfas de S em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ que omite três valores distintos fixados, então $\mathcal{F}$ é normal.

BIBLIOGRAFIA

1. Lars Ahlfors. *Conformal invariants: topics in geometric function theory.* McGraw-Hill, 1973.
2. João L. Barbosa, Ricardo Sá Earp. *Geometric methods and nonlinear analysis.* X Escola de Geometria Diferencial, UFMG, 20 à 24 de julho de 1998.
3. Alan F. Beardon. *Iteration of rational functions.* Springer, 1999.
4. Lennart Carleson and Theodore W. Gamelin. *Complex dynamics.* Springer, 1993.
5. Manfredo P. do Carmo. *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides, 1998.
6. Wellington de Melo. *Ferramentas matemáticas em dinâmica unidimensional.* Revista Matemática Universitária, No 29, 75-113, 2000.
7. Hershel M. Farkas and Irwin Kra. *Riemann Surfaces* . Springer, 1980.
8. R. E Greene e S. G. Krantz. *Function theory of one complex variables.* John Wiley and Sons, N. Y, 1997.
9. Noel J. Hicks. *Notes on differential geometry* . Van Nostrand, 1965.
10. Heinz Hopf. *Differential geometry in the large.* Lecture Notes in Mathematics, **1000**. Springer, 1989.
11. John Milnor. *Dynamics in one complex variables.* Introductory Lectures. Second edition. Vieweg, 2000.
12. J. Ordóñes. *Superfícies helicoidais com curvatura constante no espaço de formas tridimensionais.* Doctoral Thesis, PUC-Rio, (1995).

13. Christian Pommerenke. *Boundary behavior of conformal maps.* Springer, 1992.

14. John G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds.* Springer, 1994.

15. Ricardo Sá Earp et Eric Toubiana. *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann.* Diderot multimedia, 1997.

16. R. Sa Earp and E. Toubiana. *On the Geometry of Constant Mean Curvature One Surfaces in Hyperbolic Space.* Illinois J. Math.. **54**, No 1,2001.

17. Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry* , second edition. Publish or Perish, 1979.

18. William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology.* Edited by Silvio Levy, Princeton University Press, 1997.