INTRODUÇÃO ÀS SUPERFÍCIES COM CURVATURA MÉDIA 1 NO ESPAÇO HIPERBÓLICO -2001.1– Lista4

Professor: Ricardo Sá Earp

1) Elabore uma dissertação mais ampla possível sobre fins completos de superfíi cies mínimas em $\mathbb{R}^3$ de curvatura total finita. Defina o conceito de índice I e exiba exemplos. Estude sepradamente o caso mergulhado.

2) Discute o princípio do máximo de Hopf-interior e bordo para operadores elípticos lineares. Demonstre oprincípio do máximo para superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$. Idem para superfícies de curvatura média constante. Faça o mesmo no ambiente hiperbólico (veja ref. 4).

3) Consider o espaço de Lorentz $\mathcal{L}^{n+2} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ munido da métrica pseudo-riemanniana $\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}x_0^2 + \mathrm{d}x_1^2 + \cdots + \mathrm{d}x_{n+1}^2$.
   a) Mostre que existe uma única conexão afim em $\mathcal{L}$ (i.e satisfazendo as propriedades de linearidade e produto) que é *compatível* com a métrica pseudo-riemanniana de $\mathcal{L}$ e que é *simétrica.* Calcule os *símbolos de Christoffel* desta métrica pseudo-riemanniana.
   b) Considere o modelo de Minkowski $\mathcal{H}^3$ do espaço hiperbólico definido por $\mathcal{H}^3 := \{(t, x, y, z),\ -t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -1,\ t, x, y, z \in \mathbb{R}\}$ munido da métrica de Lorentz $\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$.
      i) Mostre que a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{H}$, dada por $f(x, y, z) = \left(\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}, x, y, z\right)$ determine uma orientação natural em $\mathcal{H}$ proveniente da orientação natural de $\mathbb{R}^3$. Seja M uma superfície de Riemann e sejam $z = u + iv$ coordenadas isotérmicas em M. Seja $X : M \to \mathcal{H}^3$ uma imersão conforme suave cujo vetor curvatura média está denotado por $\overrightarrow{H}$. Assuma $\overrightarrow{H} \neq 0$. Então podemos assumir que $\{X, X_u, X_v, \overrightarrow{H}\}$ em z é uma base positiva de $\mathcal{L}^4$, para cada $z \in M$. Logo, com nossa convenção sobre X, mostre que $\{X_u, X_v, \overrightarrow{H}\}$ é uma base positiva de $\mathcal{H}^3$.
   c) Considere B^3 o modelo da bola do espaço hiperbólico. Mostre que a

aplicação (*projeção estereográfica*) $F : \mathcal{H}^3 \to B^3$, dada por

$$F(t,x,y,z) = \Big(\frac{x+iy}{1+t}, \frac{z}{1+t}\Big)$$

é uma isometria global que preserva orientações . Interprete geometricamente esta aplicação . Calcule a inversa .

iii) Seja $O^+(1,3)$ o grupo de isometrias de $\mathcal{H}^3$. Considere o conjunto de matrizes

$$A(s) = \begin{bmatrix} \cosh s & \sinh s & 0 & 0 \\ \sinh s & \cosh s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i) Mostre que $\{A(s),\ s \in \mathbb{R}\}$ é um sub-grupo à um parâmetro de isometrias de $\mathcal{H}$; i. e $\{A(s)\} \subset O^+(1,3)$. Dê uma interpretação geométrica. Qual é o resultado da ação de um elemento qualquer $A(-s)$ no ponto $(\cosh s, \sinh s e_1)$, onde $e_1 = (0,1,0,0)$? Daí deduza a existência de um sub-grupo de isometrias que age transitivamente em $\mathcal{H}$ (Faça desenhos !!).

d) Seja $X \in \mathcal{H}^{n+1}$ e seja $v \in T_X\mathcal{H}^{n+1}$, onde $\mathcal{H}^{n+1}$ ó modelo de Minkowski do espaço hiperbólico. Mostre que a geodésica única que passa por X tangente ao vetor unitário v é dada por $\gamma(t) = \cosh tX + \sinh tv$. Interprete geometricamente as geodésicas neste modelo, mostrando que estas são as interseções de $\mathcal{H}^{n+1}$ com planos de $\mathbb{R}^{n+2}$ que passam pela origem dadas pela equação acima. Classifique as superfícies totalmentes geodésicas, no caso $n+1 = 3$, mostrando que são interseções de $\mathcal{H}^3$ com sub-espaços de dimensão 3 de $\mathbb{R}^4$.

4) Suponha que um campo X em uma variedade riemanniana $\overline{M}$ satisfaz $X(p) \neq 0$, $p \in \overline{M}$.

a) Estude o teorema do fluxo e do grupo local 1-parametro da teoria das EDO e mostre que existe um sistema de coordenadas $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ numa vizinhança U de p tal que $\dfrac{\partial}{\partial t} = X$.

b) Mostra que a forma volume ν se escreve numa vizinhança de p como $\nu = \sqrt{g}\, dt \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Determine $\sqrt{g}$.

c) Com as notações acima, levando em conta a expressão local obtida em sala de aula, conclua que $\operatorname{div} X = \dfrac{1}{\sqrt{g}} \dfrac{\partial}{\partial t}\sqrt{g}$, ou seja $\operatorname{div} X$ "mede intuitivamente o grau de variação do volume de $\overline{M}$ ao longo das trajetórias de X".

d) Mostre também que

$$d(\imath_X \nu) = \operatorname{div} X \nu,$$

onde $\imath$ é o produto interior de das *formas diferenciáveis* que leva uma $k+1$-forma numa k-forma (veja refs. 9, 25, 36).

e) Enuncie o teorema da divergência para variedades Riemannianas, numa situação bem geral e mostre a primeira identidade de Green (Veja na ref. 13).

5) Seja $\overline{M}$ uma variedade riemanniana e seja $\bar{\triangle} : \mathcal{D}(\bar{M}) \to \mathcal{D}(\bar{M})$ o operador Laplaciano.

a) Mostre que dada $f : \overline{M} \to \mathbb{R}$ suave, o valor de $\overline{\triangle}$ em f é dado por $\overline{\triangle} f = $ traço Hess f, onde Hess $f : T_p\overline{M} \to T_p\overline{M}$ é o operador definido por $(\text{Hess } f)(Y) = \overline{\nabla}_Y(\nabla f)$, $Y \in T_p\overline{M}$.

Além disto se $M = f^{-1}(a)$, onde a é um valor regular de f, mostre que

b) Hess f restrito a TM é auto-adjunto.

c) A curvatura média H de M, a menos de sinal, é dada por $nH = \operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}\right)$.

d) Se $g \in \mathcal{D}(\bar{M})$ mostre que $\triangle(fg) = f\triangle g + g\triangle f + 2 < \nabla f, \nabla g >$.

e) Se $\overline{M} = \{X \in \mathbb{R}^{n+1}; |X| < 1\}$ é bola unitária munida da métrica (hiperbólica) $ds^2 = \dfrac{|dX|^2}{(1-|X|^2)^2}$, mostre que

$$\overline{\triangle} = (1-r^2)^2 \left(\sum_{i=1}^{n+1} a \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + b \frac{(n-2)}{1-r^2} \frac{r\partial}{\partial r} \right),$$

para constantes $a = 1, b = 2$; onde $r = |X|$.

f) Considere $\mathcal{H}^{n+1}$ o modelo de Minkowski do espaço hiperbólico (Veja item 3) acima). Seja p um inteiro positivo menor que $n+1$ Considere $\widetilde{f}$ definida em $\mathcal{L}$ por

$$\widetilde{f}(X) = -x_0^2 - \cdots - x_{p-1}^2 + x_p^2 + x_{p+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^2$$

Seja f a função suave definida em $\mathcal{H}$ por $f = \widetilde{f}\,|_{\mathcal{H}^{n+1}}$.

i) Mostre que $\|\nabla f\|^2 = -4 + 4f^2$. *Sugestão* : Lembre-se que $X = (x_0, \ldots, x_n, x_{n+1})$ é normal à $\mathcal{H}^{n+1}$ em $\mathcal{L}$. Mostre que

$\nabla\widetilde{f} = \nabla f - 2fX$, e que $\nabla\widetilde{f}(X) = 2(-x_0, \ldots, -x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n, -x_{n+1})$. Este é um exemplo de *função transnormal* obtido por Marcos Alexandrino na sua dissertação de Mestrado (Veja ref. 1).

ii) Mostre que

$$\triangle f = (2n+4)f + 2(n-2p)$$

Isto, junto com o resultado do item i), implica que f é uma função isoparamétrica (Veja ref. 1).
Sugestão : Mostre que $\overline{\nabla}_Y \nabla\widetilde{f} = 2(-y_0, \ldots, -y_{p-1}, y_p, y_{p+1}, \ldots, y_n, -y_{n+1})$. Conclua que $\overline{\nabla}_X \nabla\widetilde{f} = \nabla\widetilde{f}$. Logo,infira que $< \overline{\nabla}_X \nabla\widetilde{f}, X >= 2f$. Deduza também que $\triangle\widetilde{f} = 2(n-2p)$. Em seguida, tome um referencial em $X \in \mathcal{H}^{n+1}$, $\{e_0, \ldots, e_n, X\}$, tal que $\{e_0, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortornormal de $\mathcal{H}^{n+1}$, para fazer os cálculos.

iii) Considere c um valor regular de f de maneira que $f^{-1}(c)$ é uma *folha regular*. Mostre que o espaço tangente $T_X f^{-1}(c)$, é gerado pelos subespaços ($v \in T_X f^{-1}(c)$)

$W_1 := \{(0, \ldots, v_p, \ldots, v_n, 0); v_p x_p + \cdots + v_n x_n = 0\}$
$W_2 := \{(v_0, \ldots, v_{p-1}, 0, \cdots, 0, v_{n+1}); v_0 x_0 + \cdots + v_{p-1} x_{p-1} - v_{n+1} x_{n+1} = 0\}$

iv) Mostre que, com a orientação determinada pelo gradiente de f, $f^{-1}(c)$ é um *cilindro* em $\mathcal{H}^{n+1}$ com curvaturas principais iguais a $-\dfrac{1+c}{\sqrt{-1+c^2}}$ (multiplicidade $n-p$) e $\dfrac{-1+c}{\sqrt{-1+c^2}}$ (multiplicidade p)
Sugestão : Use o fato que $N = \dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ é o campo normal unitário no sentido do gradiente e que $\|\nabla f\|$ é constante em $f^{-1}(c)$. Mostre que

$$\nabla_Y \nabla f = \overline{\nabla}_Y \nabla f + < \overline{\nabla}_Y \nabla f, X > X$$

Use que

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_Y \nabla f &= \overline{\nabla}_Y \nabla\widetilde{f} + \overline{\nabla}_Y 2fX \\ &= 2(-y_0, \ldots, -y_{p-1}, y_p, y_{p+1}, \ldots, y_n, -y_{n+1}) + 2fY + 2 < \nabla\widetilde{f}, Y > X \end{aligned}$$

Em seguida considere $Y = w_1 + w_2$, com $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$, para deduzir que

$$\nabla_{w_1} \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{(2+2f)w_1}{2\sqrt{-1+f^2}}$$

$$\nabla_{w_2} \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{(-2+2f)w_2}{2\sqrt{-1+f^2}}$$

Logo, $-\dfrac{1+c}{\sqrt{-1+c^2}}$ e $\dfrac{-1+c}{\sqrt{-1+c^2}}$ são a únicas curvaturas principais de $f^{-1}(c)$, contadas com multiplicidades. O resultado segue do seguinte teorema de Cartan (Veja ref. 1)

Diz-se que uma hipersuperfície é *isoparamétrica* se suas curvaturas principais são constantes.

Teorema de Cartan (Classificação das hipersuperfícies isoparamétricas com duas curvaturas principais distintas num *espaço forma*). *Seja K uma superfície isoparamétrica com curvaturas principais distintas k_1 e k_2 de multiplicidades n_1 e n_2 num $\mathrm{M}^{n+1}(c)$ espaço de curvatura seccional constante c ($M = \mathbb{R}^{n+1}$, se $c = 0$, $M = \mathbb{H}^{n+1}$, se $c = -1$ e $M = \mathbb{S}^{n+1}$, se $c = 1$.). Então , segue que K é um cilindro em $\mathrm{M}^{n+1}(c)$. Em particular, tem-se que para $c = 1$, que K é um mergulho de* $\mathbb{S}^{n_1}(\dfrac{1}{\sqrt{k_1^2+1}}) \times \mathbb{S}^{n_2}(\dfrac{1}{\sqrt{k_2^2+1}})$ em $\mathbb{S}^{n+1}$.

É interessante comparar o resultado acima com o de Nomizu que utilizou a famosa identidade de Cartan para demonstrar o seguinte (Veja ref. 1):

Teorema de Nomizu *Seja K uma hipersuperfície isoparamétrica mergulhada em $\mathrm{M}^{n+1}(c)$ com k curvaturas principais λ_i distintas. Então , para $c = 0$, k é no máximo igual a 2 e se K possuir duas curvaturas distintas então uma delas é nula. Para $c = -1$, k também é no máximo igual a 2 e se K possuir duas curvaturas distintas k_1 e k_2 então $k_1 k_2 = 1$.*

Combinando os dois resultados acima obtém-se que:

As hipersuperfícies isoparamétricas de $\mathbb{R}^{n+1}$ e de $\mathbb{H}^{n+1}$ são os cilindros e as hipersuperfícies totalmente umbílicas.

g) Mostre que as multiplicidades das m curvaturas principais distintas k_i de uma hipersuperfície isoparamétrica K são constantes. *Sugestão* : Considere $k_1, \ldots, k_{m_1}, k_m, \ldots, n$ as curvaturas principais de K de modo que $k_i \neq 0,\ i < m$. Defina $\nu = m$ se todas as curvaturas principais são distintas de zero e $\nu = m - 1$ se $k_m = 0$. Considere $n_i(x)$ a multiplicidade de k_i em $x \in K$. defina os polinômios

$$p_j(x) := \sum i = 1_i^n(x) k_i^j = \text{traço} A^j$$

onde A é o operador de Weingarten. Observe que $p_j(x)$ são funções constantes (Por quê ?). Mostre que $n_i(x)$ são constantes.

O seguinte teorema de caracterização das hipersuperfícies isoparamétricas é devido a Nomizu (Veja ref. 1)

Seja K uma hipersuperfície mergulhada em $\mathrm{M}^{n+1}(c)$ e seja $\varphi_t : K \to \mathrm{M}^{n+1}(c)$, definida por $\varphi_t(x) = \exp_x(tN)$ e $K_t = \varphi_t(K)$. Se para qualquer t, K_t tem curvatura média constante H_t, então K_t é isoparamétrica.

Nota: No que segue imediatamente, seguiremos o texto da dissertação de mestrado de Marcos Alexandrino (Veja ref. 1). Seja K uma hipersuperfície mergulhada em uma variedade Riemanniana completa M, com conexão ∇. Seja $\gamma(t)$ uma geodésica de M parametrizada pelo comprimento de arco t, tal que $\gamma(0) \in K$ e $\gamma'(0) \in T^{\perp}_{\gamma(0)}K$. Assuma que existe um campo de vetores unitário normal N; tal que $N(\gamma(0)) = \gamma'(0)$.

$*$) Considere $\alpha(s)$ uma curva suave, contida em K tal que $\alpha(0) = \gamma(0)$ e
$f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, r] \to M$, uma variação de $\gamma(t)$, definida como
$f(s,t) = \exp_{\alpha(s)}(tN(\alpha(s))$. Mostre que

$$< \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} >_{f(s,t)} = 0$$

Sugestão : Use a simetria da conexão e o fato que as curvas $s = $ const são geodésicas.

$**$) Faça um resumo sobre o conceito de *campo de Jacobi* (Veja refs. 9 e 13).

$***$) Diz-se que um campo de Jacobi $J(t)$, definido ao longo da geodésica $\gamma(t)$ é um K-campo de Jacobi, sse satisfaz às seguintes condições :

a) $< J(t), \gamma'(t) >= 0$.

b) $J'(0) + A(\gamma'(0))J(0) = 0$,

onde A denota a aplicação de Weingarten.

i) Sejam $\alpha(s)$ uma curva em K com $\alpha(0) = \gamma(0)$, $f(s,t) = \exp_{\alpha(s)}(tN(\alpha(s)))$ e $J(t) = \dfrac{\partial f(0,t)}{\partial s}$. Mostre que $J(t)$ é um K-campo de Jacobi ao longo de $\gamma(t)$. *Sugestão* : Note que como $f(s,t)$ é uma variação por geodésicas então $J(t)$ é um campo de Jacobi (Veja ref. 9). Mostre isto!! Note que $*$) garante o item a) da definição de K-campo de Jacobi. Finalmente note que

$$J'(0) = \frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f(0,0)}{\partial s}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{D}{\mathrm{d}s}\frac{\partial f(0,0)}{\partial t}\\
&= \nabla_{J(0)}\frac{\partial f(s,0)}{\partial t}\\
&= -A(\gamma'(0))J(0)
\end{aligned}
$$

ii) Mostre que se $J(t)$ é um K-campo de Jacobi ao longo de $\gamma(t)$, então existe uma curva $\alpha(s)$ em K tal que fazendo $f(s,t)=\exp_{\alpha(s)}(tN(\alpha(s)))$, $J(t)=\dfrac{\partial f(0,t)}{\partial s}$.*Sugestão* : Considere $\alpha(s)$ uma curva em K tal que $\alpha'(0)=J(0)$ e considere $\widetilde{J}(t)=\dfrac{\partial f(0,t)}{\partial s}$. Mostre que $\widetilde{J}(t)$ é um K-campo de Jacobi e note que $\widetilde{J}(0)=J(0)$. Use o item b) da definição de K-campo de Jacobi.

Define-se um ponto $\gamma(r)$ de *ponto focal* de K se existe um K-campo de Jacobi $J(t)$ ao longo de $\gamma(t)$, não identicamente nulo, tal que $J(r)=0$. Um corolário disto e do que precede é o seguinte: *Seja $\varphi_r : V \to M$ definida por $\varphi_r(x)=\exp_x(rN(x))$. Então $\gamma(r)$ é um ponto focal com multiplicidade k, sse $\gamma(r)$ é valor crítico de φ_r, sendo k a dimensão do núcleo de $d\varphi(\gamma(0))$.* O *lema do índice de Morse adaptado*, diz respeito ao índice de uma certa forma quadrática Q_a definida no conjunto de campos diferenciáveis por partes definidos em $\gamma\big|_{[0,a]}$, ortogonais à $\gamma'(t)$ e que se anulam em $t=a$. Diz que o *índice* de Q_a é finito e igual ao número de pontos focais de K, contados com suas multiplicidades, ao longo de $\gamma(t)$ para $0<t<a$ (Veja ref. 9).

6) Considere agora duas hipersuperfícies K e G mergulhadas em uma variedade Riemanniana M de dimensão $n+1$. Assuma que exista um campo unitário N de vetores normais à K. Diz-se que K e G são *paralelas* se existe s tal que a aplicação $\varphi_s(x):=\exp_x(sN(x))$ definida em K seja um difeomorfismo entre K e G.

   a) Mostre que se $p\in K, \gamma(t)=\exp_p(tN(p))$ e $J(t)$ é um K-campo de Jacobi ao longo de $\gamma(t)$, então $J(t+s)$ é um G-campo de Jacobi.
   b) Assuma que $K_t := \varphi_t(K)$ são hipersuperfícies. Dado um ponto $y=\varphi_{t_0}(x)$ de K_{t_0} define-se $N(y):=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t(x)\Big|_{t=t_0}$. Cada K_t admite uma orientação natural determinada por N. Assuma a existência de uma função

suave $f : M \to \mathbb{R}$ tal que f restrita à cada K_t seja constante. Seja $\widetilde{f}(t) := f(K_t)$. Mostre que

$$\triangle f(p) = \widetilde{f}''(t_0) - n\widetilde{f}'(t_0)H(p) \qquad p \in K_{t_0}$$

Sugestão : Observe que $\nabla f(y) = \widetilde{f}'(t)N$, e que $\nabla_N N(y) = 0$, $y \in K_t$. Considere $\{e_1, \ldots, e_n\}$ referencial local ortornormal em uma vizinhança de p em M tal que em p $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é tangente às direções principais.
Conclua

c) Sejam K_t e f definidos acima. Mostre que se $\triangle f$ é constante em cada K_t então K_t é uma hipersuperfície de curvatura média constante.

Nota (ainda seguindo Marcos Alexandrino, ref. 1): Suponha que $M = \mathrm{M}^{n+1}(c)$ uma variedade de curvatura seccional constante c . Assuma que $K_t = \varphi_t(K)$, sejam hipersuperfícies mergulhadas, e portanto paralelas à K. Seja $p \in K, \gamma(t) = \varphi_t(p)$ e seja $\{e_i\}$ uma base ortornormal de direções principais de p associadas às curvaturas principais k_i. A finalidade da presente discussão é determinar as curvaturas principais e as direções principais de K_t em $\gamma(t)$: Tome $\{J_i(t)\}$, n K-campos de Jacobi ao longo de $\gamma(t)$ com $J_i(0) = e_i$. (Veja o item $***$) acima). O fato de que $J_i''(t) + cJ_i(t) = 0$ (Por quê ?), a definição de um K-campo de Jacobi e a unicidade de campos de Jacobi garantem que :

$$J_i(t) = g_i(t)e_i(t)$$

onde $e_i(t)$ é o transporte paralelo de e_i ao longo de $\gamma(t)$ e $g_i(t)$ é uma função suave que satisfaz às seguintes equações

$$g_i''(t) + cg_i(t) = 0$$
$$g_i'(0) + k_i g_i(0) = 0$$

Logo, se $c = 0, g_i(t) = -k_i t + 1$, se $c = -1, g_i(t) = -k_i \sinh t + \cosh t$, se $c = 1, g_i(t) = -k_i \sin t + \cos t$.

d) Mostre que, nas condições acima, $\{e_i(t)\}$ é uma base ortornormal de direções principais de K_t em $\gamma(t)$ associadas às curvaturas principais $-\dfrac{g_i'(t)}{g_i}$. Calcule as curvaturas principais em cada caso $c = 0, 1, -1$.

Sugestão : Veja item a) acima.

7) (*Classificação das superfícies totalmente umbílicas* de $\mathrm{M}^{n+1}(c)$) Agora considere K uma hipersuperfície totalmente umbílica completa (conexa) com curvatura principal k de um espaço de formas espaciais $\mathrm{M}^{n+1}(c)$.

   a) Seja $p \in K$. Dado $v \in T_pK$ define-se Σ_v como sendo o hiperplano totalmente geodésico que contém p tal que $v \in (T_p\Sigma_v)^{\perp}$. Mostre que existe uma vizinhança V de p em M^{n+1} tal que $K_v := V \cap K \cap \Sigma_v$, é uma hipersuperfície umbílica de Σ_v, para todo $v \in T_pK$, com curvatura principal k. *Sugestão* : Considere para fixado $v \in T_pK$, um campo unitário η de $T(\Sigma_v)^{\perp}$. Mostre que para todo $X \in T(\Sigma_v)$ tem-se que $\overline{\nabla}_X \eta \equiv 0$. Seja $\alpha(t)$ uma curva parametrizada regular com $\alpha(0) = p$ com $\alpha(t) \in K \cap \Sigma_v$. Seja $\alpha(r) = q$. Mostre que o normal unitário $N(q) \in T_q\Sigma_v$, para todo $q \in K_v$; mostrando que $< N(\alpha(t)), \eta(\alpha(t)) > \equiv 0$. Finalmente, conclua disto, da definição de hipersuperfície umbílica e do fato que $< \overline{\nabla}_X Y, N >= k < X, Y >$, para quaisquer $X, Y \in T_qK$, que K_v é umbílica em Σ_v, como desejado

   b) Seja K uma hipersuperfície (conexa) completa com curvatura principal k em $\mathrm{M}^{n+1}(c)$. Mostre que se $c = 0, 1$ K é uma hipersuperfície totalmente geodésica ou uma esfera geodésica de $\mathrm{M}^{n+1}(c)$. Se $c = -1$ mostre que K, visto no modelo do semi-espaço $\mathbb{H}^{n+1}$, é a interseção de $\mathbb{H}^{n+1}$ com um hiperplano ou uma esfera de dimensão n de $\mathbb{R}^{n+1}$. Quando $k > 1$ mostre que K é uma esfera geodésica de $\mathbb{H}^{n+1}$.*Sugestão* : Mostre que basta demonstrar o teorema localmente. Em seguida mostre que se o teorema for verdadeiro para $n = j$ então o resultado no item a) mostra que este será verdadeiro para $n = j + 1$. Mostre que o teorema está confirmado para $n = 2$, pela classificação das curvas de curvatura constante.

8) Seja f uma função suave em uma variedade riemanniana $\overline{M}$ de dimensão $n+1$ e seja M uma subvariedade de $\overline{M}$ de dimensão k. Sejam $\overline{\nabla}$ e $\overline{\triangle}$ a conexão e o Laplaciano sobre $\overline{M}$, respectivamente. Seja $\triangle$ o laplaciano sobre M. Finalmente, seja $\vec{H}$ o vetor curvatura média de M definido pela equação

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{\nabla}_{\bar{e_i}} \bar{e}_i = k\ \overrightarrow{H} + \sum_{i=1}^{k} \nabla_{e_i} e_i,$$

onde $e_1, \dots, e_k$ é um campo de vetores ortornormais numa vizinhança de um ponto p de M e $\bar{e_1}, \dots, \bar{e_{n+1}}$ é uma extensão ortornormal suave destes campos à uma vizinhança de p em $\overline{M}$.

a) Mostre que $\triangle f = \sum_{i=1}^{k} (e_i\, e_i f - \nabla_{e_i} e_i f)$

b) Mostre que $< \nabla f, \nabla_{e_i} e_i >= \nabla_{e_i} e_i f$. Interprete o termo da direita da igualdade.

c) Mostre que $\triangle f = \overline{\triangle} f + k\vec{H} f - \sum_{j=k+1}^{n+1} (\bar{e_j}\bar{e_j} f - \overline{\nabla}_{\bar{e_j}} \bar{e_j} f)$

d) Suponha que M é imagem inversa de um valor regular de f e que as trajetórias do gradiente que partem de $p \in M$ são geodésicas. Interprete e expresse a fórmula do item anterior neste caso .

9)

a) Mostre o seguinte teorema devido a E. Hopf: Seja M uma variedade Riemanniana orientável compacta (sem bordo) e conexa. Seja f uma função suave em M com $\triangle f \geqslant 0$. Mostre que f = const. *Sugestão*: Aplique o teorema da divergência duas vezes, primeiramente a $\triangle f$, em seguida a $\triangle f^2$. Ou ainda aplique diretamente o princípio do máximo.

b) Seja $X : M \to \bar{M}$ uma imersão isométrica de uma variedade compacta (sem bordo) M de dimensão n em uma variedade $\bar{M}$ de dimensão $n+1$. Sejam f, g funções suaves e Y um campo suave em M.

i) Mostre que $\operatorname{div} f \cdot Y = f \cdot \operatorname{div} Y + \langle \nabla f, Y \rangle$, onde ∇ é o gradiente sobre M e div é a divergência sobre M.

ii) Mostre que $\triangle(f \cdot g) = f \cdot \triangle g + g \cdot \triangle f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$, onde $\triangle$ é o Laplaciano sobre M.

iii) Mostre que

$$\int_M (f \triangle g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle)\, \mathrm{d}M = 0$$

se $\bar{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ então deduza a fórmula de Minkowski

$$\int_M (1 + H(\langle X, N \rangle)\, \mathrm{d}M = 0$$

onde N é um campo de vetores normal unitário a M e H é a curvatura média calculada com respeito a N.

10) Seja $\overline{M}(c)$ uma variedade Riemanniana orientável simplesmente conexa de dimensão $n+1$ com curvatura seccional constante c. Seja $X : M \to \overline{M}(c)$ uma imersão isométrica. Seja A o operador de Weingarten associado à um

normal global N. Sejam $k_1, \ldots, k_n$ as curvaturas principais da imersão (que são exatamente os auto-valores de A). As funções simétricas de curvatura associadas à A, podem ser definidas usando o polinômio característico de A por

$$\det(tI - A) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \, S_r t^{n-r}$$

As transformações de Newton P_r são definidas indutivamente por

$$\begin{aligned} P_0 &= I \\ P_r &= S_r I - A \cdot P_{r-1} \end{aligned}$$

Seja $e_1, \ldots, e_n$ uma base ortornormal de autovetores de A correspondendo, respectivamente, aos auto-valores $k_1, \ldots, k_n$. Representaremos por A_i a restrição da transformação A ao sudespaço normal à e_i e por $S_r(A_i)$ a r- ésima função simétrica associada à A_i.. Definamos $S_{n+1} = 0$.

a) Mostre as seguintes igualdades: Para cada $1 \leqslant r \leqslant n-1$, vale

i) $P_r(e_i) = S_r(A_i) e_i \qquad \forall \quad 1 \leqslant r \leqslant n.$

ii) $\text{traço}(P_r) = \sum_{i=1}^n S_r(A_i) = (n-r) S_r$

iii) $\text{traço}(AP_r) = \sum_{i=1}^n k_i S_r(A_i) = (r+1) S_{r+1}$

iv) $\text{traço}(A^2 P_r) = \sum_{i=1}^n k_i^2 S_r(A_I) = s_1 s_{R+1} - (R+2) s_{R+2}$.

b) Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave sobre M. Defina L_r o *operador linearizado de* S_{r+1} por

$$L_r f = \operatorname{div}(P_r \nabla f)$$

Mostre que

$$\int_M (f \, L_r g + \langle P_r \nabla f, \nabla g \rangle) \, \mathrm{d}M = 0$$

c) Suponha $c = 0, 1,$ ou -1. Interprete X como sendo o *o vetor posição* de M em $\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{S}^{n+1},$ ou $\mathbb{H}^{n+1}$. Definamos H_r pela equação $S_r := \binom{n}{i} H_r$.

i) Mostre as seguintes fórmulas

$$\begin{aligned} L_r(X) &= -\big((r+1) S_{r+1}\big) N - c(n-r) S_r X \\ &= -c_0(r) \, (H_{r+1} N + c \, H_r X) \end{aligned}$$

ii) Quando S_{r+1} é constante, mostre que

$$L_r N = -\big(S_1\, S_{r+1} - (r+2)\, S_{r+2}\big) N - c\,(r+1)\, S_{r+1} X$$

iii) Suponha que M seja uma hipersuperfície fechada. Mostre as fórmulas de Minkowski em $\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{S}^{n+1},$ e $\mathbb{H}^{n+1}$

$$\int_M (H_{r+1}\ N + c\ H_r\ X)\, \mathrm{d}M = 0$$

11) Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um gráfico de uma função suave $x_{n+1} = u(x_1, \ldots, x_n)$ sobre um domínio Ω de $\mathbb{R}^n$. Considere a parametrização natural
$X : \Omega \to M$ dada por $X(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n))$. Seja $X_1, \ldots, X_n$ o referencial adaptado (global) a X. Seja (g_{ij}) a matriz da primeira forma fundamental associada a X. Sejam ∇ o gradiente e $\triangle$ o Laplaciano sobre M. Seja $H = H(x_1, \ldots, x_n, u)$ a curvatura média de M calculada com respeito ao normal unitário N que aponta para "cima", i.e para o sentido dos x_{n+1} crescente. Mostre que

a) $g_{ij} = \delta_{ij} + u_i u_j$, $g = \det g_{ij} = W(u)^2 := 1 + |Du|^2$ e $N = (v_1, \ldots, v_{n+1})$, onde u_i denota diferenciação com respeito a x_i e $v_i = \dfrac{-u_i}{W(u)}, i < n+1,$ $v_{n+1} = \dfrac{1}{W(u)}$. Além disto, $g^{ij} = \delta^{ij} - v_i v_j$.

b) Se $\psi : M \to \mathbb{R}$ é suave, então (omitindo o símbolo do somatório, seguindo a convenção usual)

$$\triangle\psi = g^{ij} D_i D_j \psi + W(u)^{-1} D_i (W(u) g^{ij}) D_j \psi$$

onde D_i significa diferenciação com respeito a x_i. Conclua que

$$\triangle\psi = g^{ij} D_i D_j \psi + nHv_j D_j \psi \quad \text{e daí } \triangle u = \frac{nH}{W(u)}.$$

c) Também verifique que

$$\begin{aligned}
\nabla H &= g^{ij} D_j H X_i \qquad \text{e daí} \\
\langle \nabla H, (0, \ldots, 1)\rangle &= g^{ij} D_j H u_i \\
&= g^{ij} \left(H_{x_j} + H_z u_j\right) u_i \\
&= H_z |\nabla u|^2 + g^{ij} u_i H_{x_j} \\
&= -v_{n+1} \left(v_i H_{x_i} - H_z |Du|^2 v_{n+1}\right)
\end{aligned}$$

d) Seja v um vetor de $\mathbb{R}^{n+1}$. Então

$$\triangle\langle N, v\rangle = -2\langle\nabla H, v\rangle - \|A\|^2\langle N, v\rangle$$

onde $\|A\|^2$ é o quadrado da segunda forma fundamental de M, definido por $\|A\|^2 :=$ traço A^2. *Sugestão*: Use um referencial geodésico em $p \in M$. Conclua

$$\begin{aligned}\triangle v_{n+1} + \|A\|^2 v_{n+1} &= -2\langle\nabla H, (0, \dots, 1)\rangle \\ &= 2v_{n+1}\left(v_j H_{x_j} - |Du|^2 v_{n+1} H_z\right)\end{aligned}$$

12) Elabore um resumo da fórmula da primeira e segunda variação da energia (Veja refs. 9 e 13).

a) Seja M uma variedade Riemanniana completa. Seja $N \subset M$ uma subvariedade fechada. Seja $p \in M - N$. Mostre que existe uma geodésica minimizante $\gamma, \gamma(0) = p, \gamma(l) \in N$, de modo que $\operatorname{dist}(p, N) = \operatorname{compr}(\gamma) = l$. Além disto,$\gamma'(l) \perp N$. *Sugestões* (complete *todos* os detalhes !!): Seja $l = \operatorname{dist}(p, N)$. Note que o disco geodésico $\overline{B}_{l+1}(p)$, de centro P e raio $l+1$ é compacto e que $K := \overline{B}_{l+1}(p) \cap N \neq \emptyset$. Mostre que $x \mapsto \operatorname{dist}(p, x)$ atinge um mínimo sobre K. $\Longrightarrow \exists q \in N; \operatorname{dist}(p, q) = l$. Seja γ uma geodésica minimizante ligando p a q (por que existe?). Seja $\beta(s)$ uma curva em N; $\beta(0) = q$. Seja $p_1 \in U \cap \gamma([0, l])$, onde U é uma vizinhança normal de q. Seja $\tilde{\beta} \subset T_{p_1}M$ definida por $\tilde{\beta}(s) = \exp_{p_1}^{-1}\big(\beta(s)\big)$. Claro que $\tilde{\beta}(s)$ está apenas definida para s suficientemente pequeno (por quê ?). Faça um desenho!!. Defina $f(s,t) = \exp_{p_1}\big(t \cdot \tilde{\beta}(s)\big), f(s, 0) = p_1, f(s, 1) = \beta(s)$. Sendo a geodésica γ_1, definida como sendo a restrição de γ ao arco entre p_1 e q, minimizante $\Longrightarrow \operatorname{compr}\big(f(s_0, t)\big) \geqslant \operatorname{compr}\big(f(0, t)\big) \forall s_0$, fazendo variar t de 0 a 1 (Por quê ?). Aplique a fórmula da primeira variação da energia para concluir o resultado (faça um desenho!!).

b) Seja M uma superfície completa de curvatura de Gauss estritamente positiva. Sejam γ_1, γ_2 duas geodédicas simples e fechadas de M. Mostre que $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$. *Sugestões* (complete *todos* os detalhes !!) : Caso contrário, $\exists$ geodésica γ; $\operatorname{dist}(\gamma_1, \gamma_2) = \operatorname{compr}(\gamma) = l$. Pelo resultado anterior $\gamma_1, \gamma_2 \perp \gamma$. Seja $V(0) = \gamma_1'(\gamma(0))$ e $V(t)$ o transporte paralelo de $V(0)$ ao longo de γ à $V(l) = \gamma(l) = q$. Considere $f(s,t) = \exp_{\gamma(t)}\big(s \cdot V(t)\big), \quad -\varepsilon < s < \varepsilon$.

Note que $f(s,0) = \gamma_1(s)$, $f(s,l) = \gamma_2(s)$. Mostre que a fórmula da segunda variação, após algumas considerações e cálculos fica:

$$\frac{1}{2}\ddot{E}(0) = -\int_0^1 K \cdot l^2.$$

Conclua daí o resultado desejado.

13) Consideremos o modelo da bola tridimensional do espaço hiperbólico dado por $B = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2+v^2+w^2 < 1\}$. Considere uma superfície de revolução gerada por uma curva c contida no disco aberto $D = \{(u,v,w)\} \in B \mid w = 0\}$. Seja $p \in D$, seja γ a unica geodésica passando por p e ortogonal à geodésica horizontal $\{v = 0\}$. Seja q a intersecção entre estas duas geodésicas. Então x é igual 'a distância hiperbólica entre q e 0, e y é o comprimento orientado de γ entre p e q. Isto significa que $x \geqslant 0$ (resp. $y \geqslant 0$) $\Leftrightarrow u \geqslant 0$ (resp.$v \geqslant 0$), onde (u,v) são as coordenadas euclideanas de p. Mostre que

a) A métrica de D neste sistema de coordenadas (x,y) é dada por $\mathrm{d}s^2 = \cosh^2(y)dx^2 + dy^2$.

b) Sejam e_x e e_y os campos de vetores unitários na direção de x e y, respectivamente. Seja $t(s)$ o campo unitário tangente à c no sentido do movimento (s parâmetro comprimento de arco). Seja $n(s)$ o normal unitário apontando para o sentido dos y crescentes. Seja α o ângulo orientado de $t(s)$ à e_y. Faça uma figura !!. Mostre as seguintes relações

$$e_x = \frac{1}{\cosh y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\sin\alpha = \cosh y \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \quad \cos\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$n(s) = -\cos\alpha\, e_x + \sin\alpha\, e_y$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} = \frac{-\cos\alpha}{\cosh y}\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\,\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\dot{c} = \frac{\sin\alpha}{\cosh y}\frac{\partial}{\partial x} + \cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial y}$$

c) Suponha que $f(s,t)$, $a \leqslant s \leqslant b$, $0 \leqslant t < \delta$ seja uma dada variação própria de $c(s)$, i.e, $f(s,0) = c(s)$ e $f(a,t) = c(a)$, $f(b,t) = c(b)$. Seja $g := \cosh y$.

i) Mostre que o *campo variacional* é dado por $V(s) = g \cdot (\partial x \,/\, \partial t)_0\, e_x + (\partial y \,/\, \partial t)_0\, e_y$ $(g = \cosh y)$.

ii) Mostre que a fórmula da primeira variação fica

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_c(t)\big|_{t=0} = -\int_a^b \left\{ \left(2gg' \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + g^2 \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}s^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_0 + \left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}s^2} - gg' \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_0 \right\} \mathrm{d}s$$

iii) Conclua *à partir da fórmula da primeira variação* que esta determina a curvatura geodésica de c, e infira dos itens anteriores que a curvatura (geodésica) de c, com respeito ao normal n é dada por

$$k(s) = -\frac{d\alpha}{ds} - \tanh y \, \sin \alpha.$$

Mostre que isto dá uma curvatura principal $k_1 = k$ da superfície de revolução gerada por c.

iv) Mostre que a outra curvatura principal k_2 é dada por $k_2 = -\sin \alpha \, \coth y$.

d) Considere um sistema de coordenadas de B dado por x, y, θ, onde θ é o ângulo de rotação em torno do eixo x.

i) Mostre que a métrica de B neste sistema de coordenadas se escreve como $\mathrm{d}s^2 = \sinh^2 y \, \mathrm{d}\theta + \cosh^2 y \, \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$

ii) Considere $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial}{\partial \theta}$, os campos adaptados a este referencial. Seja $\nu := \dfrac{1}{\|\frac{\partial}{\partial \theta}\|} \dfrac{\partial}{\partial \theta}$. Mostre que

$$\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = -\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} + \sin \alpha \, \tanh y\right) n$$
$$\nabla_\nu \nu = -\coth y \, \frac{\partial}{\partial y}$$

Usando estas fórmulas re-obtenha as curvaturas principais k_1 e k_2 obtidas no item (c),(iii),(iv).

e) Mostre que se a curva c é o gráfico de uma função positiva $y = y(x)$, então as curvaturas principais da superfície de revolução gerada por c

são dadas por:

$$k_1 = \frac{y'' \cosh y - 2 \sinh y \, y' - \sinh y \, \cosh^2 y}{(\cosh^2 y + y'^2)^{3/2}} \qquad \text{e}$$

$$k_2 = -\frac{\cosh^2 y}{\sinh y (\cosh^2 y + y'^2)^{1/2}}$$

f) Encontre uma integral primeira da equação da curvatura média constante no espaço hiperbólico de uma curva geratriz de uma superfície de revolução, mostrando que

$$\frac{v \, \cosh^2 y}{\sqrt{(cosh^2 y + y'^2)}} - 2H \, u = \text{const}$$

onde $v = c \sinh y$, $c =$ comprimento do círculo hiperbólico unitário e $u = \dfrac{c\,(\sinh y)^2}{2}$.

14) Considere $\mathbb{H}^{n+1} = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n);\ x_n > 0)\}$ o modelo do semi-espaço do espaço hiperbólico munido da métrica $\mathrm{d}s^2 = \dfrac{1}{x_n}\,(dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2)$. Seja $\mathcal{P}$ o hiperplano totalmente geodésico dado por $\mathcal{P} = \{x_0 = 0\}$. Seja $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ um domínio de $\mathcal{P}$. Seja M uma hipersuperfície de $\mathbb{H}^{n+1}$ Seja N um campo de vetores unitários (na métrica hiperbólica) normal à M.

a) Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, uma curva paramerizada por comprimento de arco (hiperbólico). Seja κ_N a curvatura normal de α com respeito à N. Reparametrizando α pelo parâmetro comprimento de arco euclideano (visto M como hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$), obtemos uma curva β. Considere a curvatura normal k_{N} de β com respeito ao campo de vetores N unitários (na métrica euclideana) normal à M. Mostre a seguinte relação:

$$\kappa_N = k_{\mathrm{N}} \, x_n + \mathrm{N}_n$$

onde N_n representa a última componente de N.

b)

i) Deduza à partir da fórmula anterior a equação da curvatura média pré -determinada H de um *gráfico horizontal* dado por uma função $x_0 = u(x_1, \ldots, x_n)$ definida sobre um domínio $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$.

ii) Idem para a equação da curvatura média pré-determinada H de um *gráfico vertical* dado por uma função $x_n = u(x_0, \dots, x_{n-1})$ definida sobre um domínio $\Omega \subset \partial_\infty \mathbb{H}^{n+1}$.

iii) Mostre um teorema tipo Olinde Rodrigues para superfícies M em $\mathbb{H}^3$. Mostre também que a semi-soma das curvaturas normais em um ponto $p \in M$, para qualquer par de direções ortogonais é igual a curvatura média $H(p)$ de M em p.

iv) Mostre que as linhas principais de M em $\mathbb{H}^{n+1}$ e de M em $\mathbb{R}^{n+1}$ *coincidem*. Conclua que M é totalmente umbílica em $\mathbb{H}^{n+1} \Leftrightarrow M$ é totalmente umbílica em $\mathbb{R}^{n+1}$. Dê a classificação das hipersuperfícies totalmente umbílicas de $\mathbb{H}^{n+1}$. Dê também outra demonstração deste fato.

c) Deduza a classificação das superfícies isoparamétricas de $\mathbb{H}^3$, seguindo o seguinte roteiro : Seja $p \in M$, um ponto não umbílico de uma superfície M em $\mathbb{H}^3$.

(i) Mostre que existe um referencial ortornormal $\{X_1, X_2\}$ numa vizinhança de p *principal*, i.e, $AX_i = k_i X_i, i = 1, 2$, onde A é o *operador de Weingarten* que representa a segunda forma fundamental de M.

ii) Seja ∇ a conexão de M. Mostre que as quantidades $\nabla_{X_2} X_1$, $\nabla_{X_1} X_2$, $\nabla_{X_1} X_1$, $\nabla_{X_2} X_2$ estão determinadas por funções a, b que dependem apenas de k_1, k_2 e das suas derivadas com respeito a X_1, X_2. Precisamente, mostre que numa vizinhança u de p:

$$(1) \begin{cases} \nabla_{X_2} X_1 = b\, X_2 & \nabla_{X_1} X_2 = a\, X_1 \\ \nabla_{X_2} X_2 = -b\, X_1 & \nabla_{X_1} X_1 = -a\, X_2 \end{cases} \qquad [X_1, X_2] = a\, X_1 - b\, X_2$$

onde $a = \dfrac{X_2(k_1)}{k_2 - k_1}$ e $b = -\dfrac{X_1(k_2)}{k_2 - k_1}$. Além disto, mostre que

$$\begin{aligned} K_e := k_1\, k_2 = {} & \frac{(X_1^2(k_2) - X_2^2(k_1))(k_2 - k_1)}{(k_2 - k_1)^2} \\ (2) \qquad & + \frac{X_1(k_2)(2X_1(k_2) - X_1(k_1))}{(k_2 - k_1)^2} \\ & + \frac{X_2(k_1)(X_2(k_2) - 2X_2(k_1))}{(k_2 - k_1)^2} + 1 \end{aligned}$$

em U. *Sugestões*: As equações (1) seguem da compatibilidade, da simetria e das equações de Codazzi. Enquanto que a equação (2) segue da equação de curvatura de Gauss.

iii) Mostre que existe um sistema de coordenadas principais numa vizinhança de p. *Sugestão*: Basta mostrar que existem campos $Y_1 = f\,X_1$ e $Y_2 = g\,X_2$; tais que $[Y_1, Y_2] = 0$. Conclua que uma superfície isoparamétrica (i.e todas as curvaturas principais são constantes), *não umbílica* é um cilindro hiperbólico.

15) Neste item serão abordados algumas aplicações do princípio do máximo e do princípio de reflexão de Alexandrov.

a) Mostre que uma superfície propriamente mergulhada em $\mathbb{H}^3$ de curvatura média constante cujo bordo assimptótico é um ponto é uma horosfera. E se o bordo assimptótico for um círculo ? E se a superfície é uma superfície especial de Weingarten ?

b) Mostre que o seguinte *teorema de Hsiang*: Uma superfície propriamente mergulhada de $\mathbb{H}^{n+1}$ contida dentro de um cilindro, com curvatura média constante é uma hipersuperfície de revolução. O que você pode dizer, sob as mesmas condições , se a superfície é uma superfície especial de Weingarten ?

c) Mostre que se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio que contém discos de raios arbitrariamente grandes então não existe uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$, e um número positivo $c > 0$ tal que a curvatura média H do gráfico de f satisfaça $H \geqslant c > 0$

d) Mostre que não existe um gráfico vertical mínimo em $\mathbb{H}^{n+1}$ sobre um semi- espaço fechado do bordo assimptótico $\partial_\infty \mathbb{H}^{n+1}$.

16) Elabore um resumo sobre as relações entre uma superfície de curvatura média 1 em $\mathbb{H}^3$ e as superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$.

BIBLIOGRAFIA

1) M. Alexandrino. *Hipersuperfícies de nível de uma função transnormal.* Dissertação de mestrado, PUC-Rio, 1997.

2) A. D. Alexandrov. *Uniqueness theorems for surfaces in the large.* I, (Russian)

Vestnik Leningrad Univ. Math. **11**, 5-17 (1956).

3) J. L. Barbosa and R. Sa Earp. *Prescribed mean curvature hypersurfaces in $H^{n+1}(-1)$ with convex planar boundary*, I. Geom. Dedicata, **71**, 61-74, (1998).

4) J. L. Barbosa and R. Sa Earp. *Prescribed mean curvature hypersurfaces in H^{n+1} with convex planar boundary*, II. Séminaire de théorie spectrale et géometrie de Grénoble **16**, 43-79, (1998).

5) M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet. *Le spectre d'une variété Riemanniene*. Lecture Notes **194**, Springer, 1971.

6) F. Braga Brito and R. Sa Earp. *On the Structure of certain Weingarten surfaces with boundary a circle*. An. Fac. Sci. Toulouse **VI**, No 2, 243-255, (1997).

7) R. Bryant. *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space*; Asterisque **154-155** , Soc. Math de France , 321-347 , (1987).

8) R. Bryant. *Complex analysis and a class of Weingarten surfaces*. Preprint.

9) M. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides, IMPA, 1988 (segunda edição).

10) P. Castillon. *Sur les sous-variétés à courbure moyenne constante dans l'espace hyerbolique*. Doctoral Thesis, Université Joseph Fourier (Grénoble I), (1995).

11) P. Collin. *Topologie et courbure des surfaces minimales proprement plongées de R^3*. Ann. Math. 2nd Series **145**, 1-31, (1997).

12) M.P. Do Carmo, H.B. Lawson Jr. *On Alexandrov - Bernstein theorems in hyperbolic space*. Duke Math. J. **50**, No. 4, (1983).

13) S. Gallot, D. Hulin e J. Lafontaine. *Riemannian Geometry*. Springer, 1987.

14) D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer, (1983).

15) J. M. Gomes. *Sobre hipersuperfícies com curvatura média constante no espaço hiperbólico*. Doctoral thesis, IMPA (1985).

16) E. Hebey. *Introduction àl'analyse non linéaire sur les varié tés*. Diderot Editeur, (1997).

17) N. Hicks. *Notes on differential geometry.* Van Nostrand, 1965.

18) D. Hoffman and W. Meeks. *The strong halfspace theorem for minimal surfaces.* Inventiones Math. **101**, 373-377, (1990).

19) H. Hopf. *Differential geometry in the large.* Lect. Notes in Math., Springer, **1000**, (1983).

20) W-Y Hsiang. *On generalization of theorems of A. D. Alexandrov and C. Delaunay on hypersurfaces of constant mean curvature.* Duke Math. J. **49**, No.3, (1982).

21) N. Korevaar, R. Kusner and B. Solomon. *The structure of complete embedded surfaces with constant mean curvature.* J. Diff. Geom. **30**, 465-503, (1989).

22) N. Korevaar, R. Kusner, W.H. Meeks III and B. Solomon. *Constant mean curvature surfaces in hyperbolic Space.* Amer. J. Math. **114**, 1-143, (1992).

23) N. Korevaar. *Sphere theorems via Alexandrov for constant Weingarten curvature hypersurfaces–appendix to a note of A. Ros.* J. Diff. Geom. **27**, 221-223, (1988).

24) R. Kusner. *Global Geometry of Extremal Surfaces in Three-Space*, Doctoral Thesis, University of California, Berkeley (1985).

25) S. Lang. *Differential manifolds.* Springer, 1985.

26) B. Lawson. *Complete minimal surfaces in S^3.* Ann. Math. **92**, 335-374, (1970).

27) R. Langevin and H. Rosenberg. *A maximum principle at infinity for minimal surfaces and applications.* Duke Math. J. **57**, 819-828, (1988).

28) B. Nelli and R. Sa Earp. *Some Properties of Hypersurfaces of Prescribed Mean Curvature in H^{n+1}.* Bull. Sc. Math. **120**, No 6, 537-553 (1996).

29) J. Ordóñes. *Superfícies helicoidais com curvatura constante no espaço de formas tridimensionais.* Doctoral Thesis, PUC-Rio, (1995).

30) H. Rosenberg. *Hypersurfaces of constant curvature in space forms.* Bull. Sc. Math. 2^e série **117**, 211-239 (1993).

31) R. Sa Earp and E. Toubiana. *Some applications of maximum principle to hypersurfaces in Euclidean and hyperbolic space.* In: New Approaches in

Nonlinear Analysis (edited by Th.Rassias), Hadronic Press, U.S.A., 183-202, (1999).

32) R. Sa Earp and E. Toubiana. *Existence and uniqueness of minimal graphs in hyperbolic space.* To appear in the Asian Journal of Mathematics (new Journal), (Editors-in-Chief : S-T Yau (Harvard) e R. Chan (Hong Kong)), **4**(3), 2000. International Press.

33) R. Sa Earp and E. Toubiana. *On the Geometry of Constant Mean Curvature One Surfaces in Hyperbolic Space.* To appear in the Illinois J. Math.

34) R. Schoen. *Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces.* J. Diff. Geom. **18**, 791-809, (1983).

35) M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry.* Publish or Perish Volume IV, second edition, (1979).

36) F. Warner. *Foundations of differentiable manifold and Lie Groups.* Springer, 1986.