

# INTROD. VCOMPLEXAS- AGOSTO DE 2006.2-Lista1

Professor: Ricardo Sá Earp

## PARTE A: NÚMEROS COMPLEXOS E GEOMETRIA DE $\mathbb{C}$

1) Coloque sobre a forma  $x + iy$  as seguintes expressões

a)  $\frac{(-1/2 + i\sqrt{3}/2)^4}{3 - 2i}$ .

b)  $(1 + i)^n + (1 - i)^n, n \in \mathbb{N}$ .

2) Resolva as equações

a)  $z^3 = -1$ .

b)  $z^2 + \sqrt{3}2iz - 6i = 0$ .

3) Determine o conjunto

$$E = \left\{ z; z = c + \rho \left( \frac{1 + it}{1 - it} \right), t \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$c \in \mathbb{C}, \rho > 0.$$

4) Seja  $f(z) = \frac{z - a}{z\bar{a} - 1}$ ,  $|a| < 1$ . Mostre que  $|f(z)| < 1$  se  $|z| < 1$  e  $|f(z)| = 1$  se  $|z| = 1$ .

**Pesquisa opcional:** Diga tudo o que você poderá descobrir sobre a função  $z \mapsto f(z)$ .

5)

a) Mostre que se  $w^n = 1, w \neq 1, n \geq 2$  então

$$1 + w + \dots + w^{n-1} = 0.$$

b) Seja  $w = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ . Mostre que para  $h \neq kn, k \in \mathbb{Z}$ , tem-se que

$$1 + w^h + \dots + w^{(n-1)h} = 0.$$

Além disto verifique que

$$1 + z + \dots + z^{n-1} = (z - w)(z - w^2) \dots (z - w^{n-1}).$$

6) Considere  $\mathcal{L}$  a reta em  $\mathbb{C}$  determinada pelo número complexo  $a$  e pelo vetor diretor  $b \in \mathbb{C}, b \neq 0$ . Determine os seguintes conjuntos

a)  $\left\{z; \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) = 0\right\}$

b)  $\left\{z; \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) > 0\right\}$

c)  $\left\{z; \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) \geq 0\right\}$

7) Mostre que a equação geral de uma reta ou círculo no plano complexo é da forma

$$\alpha z\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0$$

onde  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}, |\beta|^2 > \alpha\gamma$ .

a) Dê condições sobre  $\alpha$  para que a equação represente ou bem uma reta ou bem um círculo. No caso do círculo calcule o seu centro e o seu raio, em função dos parâmetros  $\alpha, \beta, \gamma$ .

8) Mostre que

$$A|\alpha|^2 + B\alpha\bar{\beta} + \bar{B}\bar{\alpha}\beta + C|\beta|^2 \geq 0$$

para toda escolha de  $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$

$$A \geq 0, \quad C \geq 0, \quad |B|^2 \leq AC$$

9) Utilize o exercício anterior e o fato que  $\sum_{k=1}^n |\alpha a_k + \beta b_k|^2 \geq 0$ , para  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  para estabelecer a desigualdade de Schwarz:

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right|^2 \leq \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \sum_{k=1}^n |b_k|^2.$$

9) Determine o subconjunto  $A := \{|z^2 - 1| < 1\}$ . Sugestão: Estude a curva  $|z^2 - 1| = 1$ .