

# INTROD. VCOMPLEXAS- SETEMBRO de 2006–lista10

*Professor: Ricardo Sá Earp*

## PROPRIEDADES DE FUNÇÕES HOLOMORFAS

- 1) (*Lema de Schwarz*) Vamos lembrar o enunciado do Lema de Schwarz. Seja  $f(z)$  uma função holomorfa no disco  $|z| < 1$ . Suponhamos que

$$f(0) = 0, \quad |f(z)| < 1 \quad \text{para } |z| < 1.$$

Mostre que

- i)  $|f(z)| \leq |z|$  para  $|z| < 1$ .
- ii) Se vale a igualdade  $|f(z_0)| = |z_0|$ , para algum  $z_0 \neq 0$ , então  $f(z) = \lambda z$ ,  $\forall z$ ,  $|z| < 1$  e  $|\lambda| = 1$ . O que você pode dizer sobre a derivada de  $f(z)$  em  $z = 0$ ?
- a) Mostre que uma equivalência conforme do disco aberto unitário  $\mathcal{D}$  sobre si mesmo que deixa fixa a origem é uma rotação. Quais destas transformações satisfaz  $f(a) = 0$ , para  $|a| < 1$ ? Mostre que o conjunto de todas as equivalências conformes de  $\mathcal{D}$  é igual ao conjunto de todas as aplicações de Möbius que preservam  $\mathcal{D}$ . O que são estas ( veja exercício 2) c), Lista 3) ?
- b) Mostre que o conjunto de todas as equivalências conforme do semi-plano superior aberto  $\mathcal{H} = \{\text{Im } z > 0\}$  que deixa fixo o ponto  $i$  é dado pela família a 1-parâmetro

$$z \longrightarrow \frac{z + \tan \frac{\theta}{2}}{1 - z \tan \frac{\theta}{2}}$$

que dependem do parâmetro real  $\theta$ . Este é na linguagem da teoria dos grupos o sub-grupo de isotropia do ponto  $z = i$  do grupo das transformações de Möbius que preservam  $\mathcal{H}$ .

- c) *Problemas de extremo*: Sejam  $a$  e  $b$  números complexos tais que  $|a| < 1$  e  $|b| < 1$ . Quão grande  $|f'(a)|$  pode ser se  $f$  está sujeita às condições  $f(z)$

é holomorfa,  $\|f\|_\infty \leq 1$  e  $f(a) = b$ ? *Resp* :  $|f'(a)| \leq \frac{1 - |b|^2}{1 - |a|^2}$ . Quando é que vale a igualdade ?

Suponha também que  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ . Maximize  $\left|f\left(\frac{3}{4}\right)\right|$ . Para quais funções  $f$  o máximo é atingido ? *Resp* :  $\frac{2}{5}$ . Agora dentre todas as funções holomorfas e limitadas por 1 no disco unitário aberto  $\mathcal{D}$ , mostre que  $\max\left|f'\left(\frac{1}{3}\right)\right|$  é assumido quando  $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ . Para que funções este máximo é assumido?

2) Seja  $\mathcal{A}$  um conjunto aberto em  $\mathbb{C}$  e seja  $\gamma$  uma curva seccionalmente  $C^1$  em  $\mathbb{C}$ . Suponha que  $\varphi : [\gamma] \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  é contínua e defina  $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$g(z) = \int_{\gamma} \varphi(z, w) dw.$$

Mostre que

a)  $g$  é contínua.

b) Se  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$  existe para cada  $(w, z) \in [\gamma] \times \mathcal{A}$  e é contínua, então  $g$  é analítica e

$$g'(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial z} dw$$

c) Suponha que  $\varphi$  é contínua em  $[\gamma]$ . Use o exercício anterior para mostrar que

$$g(z) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{w - z} dw$$

é analítica em  $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$  e que

$$g^{(n)}(z) = n! \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

3) *Caracterizações das funções racionais*

a) Seja  $f$  uma função inteira tal que para  $r > 0$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  e para  $b \in \mathbb{R}^+$ , apropriados tem-se que

$$|f(z)| \leq a + b|z|^\alpha, \quad \text{se } |z| > r$$

Mostre que  $f$  é uma constante

- b) Seja  $f$  uma função inteira tal que  $\Re f \geq 0$ . Mostre que  $f$  é uma função constante.
- c) Seja  $f$  uma função inteira. Suponha que existe  $M \geq 0$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $r \geq 0$ , tais que

$$|f(z)| \leq M|z|^\alpha, \quad |z| > r$$

Mostre que  $f$  é um polinômio de grau  $N \leq \alpha$ .

- d) (*Fazer após o estudo das singularidades isoladas de uma função holomorfa*) Seja  $f$  uma função inteira; se  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = L$  existe (finito ou infinito), mostre que  $f$  é um polinômio.
- e) (*Fazer após o estudo das singularidades isoladas de uma função holomorfa*) Seja  $f$  uma função meromorfa em  $\mathbb{C}$  tendo um número finito de polos. Se  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = L$  existe (finito ou infinito), então  $f(z)$  é uma função racional de  $z$  (isto é quociente de dois polinômios). *Sugestão:* Considerar os casos  $0 < L \leq \infty$  e  $L = 0$ , separadamente.
- 4) Seja  $f(z) = z(z-1)(z-2)$ . Mostre que o máximo de  $f$  em  $|z| \leq 1$  é atingido no círculo  $|z| = 1$  e vale 6.
- 5) Mostre que  $\sup \{ |\sin z|; |\Re z| \leq \pi, |\Im z| \leq \pi \} = \sqrt{1 + \sinh^2 \pi}$ . Em que pontos este máximo é atingido?
- 6) Seja  $f$  uma função holomorfa não constante definida em  $|z| < R$ ; coloquemos  $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$  com  $0 \leq r < R$ . Mostre que  $M : [0, R) \rightarrow [0, \infty)$  é estritamente crescente.
- 7) Seja  $f$  uma função holomorfa não constante definida que está para  $|z| > R$  ( $R \geq 0$ ) tal que  $c = \lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)|$  existe; para  $r > R$  define-se  $M(r)$  como no exercício precedente. Mostre que

$$M(r) = \sup_{|z| \geq r} |f(z)|$$

e  $M : [R, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  é estritamente decrescente.

- 8) Seja  $f$  um polinômio de grau  $n$ ; seja  $M(r)$  como no exercício 31). Mostre que para  $0 < r < s$

$$\frac{M(r)}{r^n} \geq \frac{M(s)}{s^n}$$

sendo que a igualdade vale  $\Leftrightarrow f(z)$  é da forma  $az^n$ . *Sugestão:* Aplique o exercício anterior na função  $g$  dada por  $g(z) = f(z)/z^n$ .

- 9) O lema de Schwarz tem muitas aplicações na teoria de aplicações conformes. Também tem aplicações na moderna teoria da Dinâmica Complexa.

Seja  $f(z)$  uma função holomorfa no disco aberto  $B_1(0)$ , satisfazendo  $\Re f(z) > 0$ , e  $f(0) = 1$ . Mostre que

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

a) Dê exemplos explícitos de tais  $f(z)$ .

b) Seja  $f(z)$  uma função limitada no disco  $B_1(0)$ . Suponha que  $|f(z)| \leq 1$ ,  $\forall z \in B_1(0)$ . Mostre que

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

c) Seja  $f(z)$  uma função limitada no disco  $B_1(0)$ . Suponha que  $|f(z)| \leq 1$ ,  $\forall z \in B_1(0)$ . Suponha que  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , sejam zeros de  $f(z)$ . Mostre que

$$|f(z)| \leq \prod_{k=1}^n \left| \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k}z} \right|$$

d) em particular conclua um caso particular da fórmula de Jensen

$$|f(0)| \leq \prod_{k=1}^n |a_k|$$

e) Seja  $f$  uma função inteira, verificar

$$f(z) - f(0) = \frac{z}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w(w-z)} dw \quad \text{se } |z| < R$$

onde  $\gamma_R(t) = Re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  e  $R > 0$ . Deduzir que, para  $|z| < R$ ,

$$|f(z) - f(0)| \leq \frac{|z|R}{2\pi(R - |z|)} \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} |f(Re^{it})| dt$$

Concluir que se

$$\sup_{R>0} \int_0^{2\pi} |f(Re^{it})| dt < \infty$$

então  $f$  é uma constante. ( Note que isto generaliza o teorema de Liouville; este raciocínio é devido a Cauchy e é anterior ao enunciado do teorema de Liouville).

- f) Continuando o exercício precedente mostre que se  $f$  é uma função inteira e se

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} |f(Re^{it})| dt = 0$$

então  $f$  é uma constante. O mesmo se

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} |f(Re^{it})| dt < \infty$$

mostrar que  $f(z)$  é da forma  $a + bz$ , onde  $a, b$  são constantes complexas.

- 10) Seja  $f$  uma função holomorfa definida num domínio  $\Omega$  que contém o disco unitário fechado, isto é,  $\{|z| \leq 1\} \subset \Omega$ . O que você pode dizer de  $f$  se  $f$  satisfaz:  $|f(z)| = 1$ , se  $|z| = 1$ ?
- 11) Deduzir que se  $f$  é real sobre o círculo  $|z| = r$ ,  $0 < r < R$ , então  $f$  é uma constante real em  $|z| < R$ .
- 12) (*Princípio de reflexão de Schwarz*) O princípio de reflexão de Schwarz tem muitas aplicações na teoria das transformações conformes, como por exemplo na *fórmula de Schwarz-Christoffel*.
  - a) Deduza a versão do *princípio de reflexão de Schwarz* quando o círculo  $|z| = 1$  substitue  $\mathbb{R}$ . Faça o mesmo para círculos quaisquer. *Sugestão:* Use uma transformação de Möbius conveniente.
  - b) Mostre que se  $f(z)$  é inteira e real no eixo real, imaginário puro no eixo imaginário, então  $f(z)$  é ímpar.
  - c) Se  $f(z)$  é inteira e satisfaz  $|f(z)| = 1$ , para  $|z| = 1$ , o que você pode dizer sobre  $f$ ? Por outro lado, se  $f$  leva o disco unitário  $B_1(0)$  em si mesmo e satisfaz  $|f(z)| = 1$ , para  $|z| = 1$ , o que você pode dizer sobre  $f$ ?
  - d) Mostre que uma *transformação conforme*  $w = f(z)$  que leva o disco unitário  $B_1(0)$  sobre a esfera de Riemann  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , *cortada ao longo*

do raio  $-\infty \leq w \leq \frac{-1}{4}$ , pode ser estendida para além do círculo  $|z| = 1$ , satisfazendo a relação

$$f(z) = \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

além disso, mostre que  $w = f(z)$  leva a esfera de Riemann sobre a esfera de Riemann recoberta duas vezes (de grau 2); logo conclua que deve ser uma função racional com dois pólos. Um exemplo satisfazendo  $f(0) = 0$  e  $f'(0) > 0$ , é a função de Koebe  $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ .