INTROD. VCOMPLEXAS- NOVEMBRO de 2006–lista11

Professor: Ricardo Sá Earp

PARTE A: DESENVOLVIMENTO DE LAURENT E RESÍDUOS

Observe as seguintes técnicas de desenvolvimento de Laurent:

- $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$, para $0 < |a| < |z| < |b|$.

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left[\cdots + \frac{a^2}{z^3} + \frac{a}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{b} + \frac{z}{b^2} + \frac{z^2}{b^3} + \cdots\right]$$

A mesma função para $|z| > b$.

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{b-a}\left[\frac{b-a}{z^2} + \frac{b^2-a^2}{z^3} + \frac{b^3-a^3}{z^4} + \cdots\right]$$

•• $\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}$ para $|z| > 1$. Escreva (fazendo $\dfrac{1}{z} = z^{'}$)

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}} = \mathrm{e}^{\frac{z^{'}}{1-z^{'}}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$$

onde

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n-1}{k-1}}{k!}$$

••• $\sqrt{(z-1)(z-2)}$, para $|z| > 2$. Onde o ramo da raiz quadrada está escolhido de forma que seja positivo para $z = x$ real $x > 2$. Note que usando o desenvolvimento binomial de Abel

$$\left[c_0 z - c_1 + \frac{c_2}{z} - \frac{c_3}{z^2} + \cdots\right],$$

Onde (colocando $\alpha = 1/2$)

$$c_n = \binom{\alpha}{n} + 2\binom{\alpha}{n-1}\binom{\alpha}{1} + 2^2\binom{\alpha}{n-2}\binom{\alpha}{2} + \cdots + 2^n\binom{\alpha}{n}.$$

1) Expanda as funções abaixo em suas séries de Laurent, justificando todos os passos.

   a) $\dfrac{e^z}{(1-z)}$, para $|z| < 1$. *Sugestão*: Seja $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ o desenvolvimento de Laurent (Taylor) da função dada (por quê ?). Use a fórmula de multiplicação de séries para calcular a_n mostre que

$$a_n = \left(1 + \cdots + \frac{1}{n!}\right), \qquad n \geqslant 1,\ a_0 = 1$$

   b) $\dfrac{1}{z^2+1}$, para $0 < |z-i| < 2$. *Resp.*

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{-i/2}{(z-i)} + \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{4}\left(\frac{i}{2}\right)^n (z-i)^n$$

   c) Considere a função

$$f(z) = \frac{1}{1-z}\, e^{1/z}$$

      i) Escreva o desenvolvimento de Laurent de $f(z)$ em $\{|z| > 1\}$, justificando cada passo de seus cálculos. Encontre o resíduo de $f(z)$ no ∞.

      ii) Idem para o desenvolvimento de Laurent de $f(z)$ no anel $\{0 < |z| < 1\}$.

   d) Para cada uma das funções $f(z)$ dada nos itens a) a c) acima calcule

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^n}\, dz$$

   onde a é uma singularidade isolada de $f(z)$ e γ é uma curva simples fechada envolvendo tal singularidade de $f(z)$ (e não envolvendo outra singularidade de $f(z)$)

2)

   a) Seja $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$. Justifique o fato que f é uma função meromorfa e que tem polo duplo em $z = i$. Escreva o desenvolvimento de Laurent de f numa vizinhança de $z = i$. Mostre que $\mathrm{Res(f,i)} = \dfrac{-3}{4e}$.

b) Calcule os resíduos de $f(z) = \dfrac{1}{z^6+1}$ em cada um de seus polos.

3) Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ e mostre que

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\lambda\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

para $0 < |z| < \infty$, onde para $n \geqslant 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\lambda\cos t}\cos nt\,\mathrm{d}t.$$

4)

a) Encontre os desenvolvimentos de Laurent e os resíduos das funções abaixo, numa vizinhança perfurada de cada singularidade.

i) $f(z) = \dfrac{1}{1-\cos z}$.

ii) $= \dfrac{2+3z}{1-\mathrm{e}^z}$.

iii) $\dfrac{z-1}{z^5-1}$.

iv) $\dfrac{\mathrm{e}^{iaz}}{4+z^2}$.

v) (neste exemplo restrinja-se às singularidades contidas no semi-plano superior)

$$\frac{\left(\log z - \log 2 - \dfrac{i\pi}{2}\right)^2}{4+z^2}$$

onde o ramo do logaritmo está tomado retirando-se o semi-eixo imaginário negativo, com o argumento variando entre $-\pi/2$ e $3\pi/2$.

vi) (neste exemplo restrinja-se às singularidades contidas no semi-plano superior)

$$\frac{\log z - \log 2 - i\pi/2}{(z^2+4)^2}$$

onde tomamos o mesmo ramo do exemplo anterior.

b) Para cada um dos exemplos dado nos itens *i)* a *vi)* do item *a)* acima, calcule

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{2003}}\,\mathrm{d}z$$

onde γ é uma curva simples fechada positivamente orientada, em torno de uma singularidade de $f(z)$, sem passar por uma singularidade de $f(z)$, com γ bordando um domínio Ω, de maneira que $\overline{\Omega}$ contém apenas uma única singularidade de $f(z)$.

c)
   i) Calcule
$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\log(z+1)}{z^n}\,\mathrm{d}z, \quad n \geqslant 1$$
   ii) Deduza da fórmula acima uma fórmula para o cálculo de certas integrais reais.

5) Considere a função
$$f(z) = \frac{1}{1-z}\,\mathrm{e}^{1/z}$$
   a) Obtenha o desenvolvimento de Laurent de $f(z)$ no anel $|z| > 1$.
   b) Obtenha o desenvolvimento de Laurent de $f(z)$ no anel $0 < |z| < 1$. Calcule o resíduo, e em seguida avalie a integral
$$\int\limits_{|z|=1/2} \frac{f(z)}{z^{2003}}\,\mathrm{d}z$$

6) Escreva o desenvolvimento de Laurent de
$$f(z) = \mathrm{e}^{1/(z-1)}$$
para $|z| > 1$. Em seguida calcule
$$\int_{|z|=11^{10^{10}}} \frac{\mathrm{e}^{1/(z-1)}}{z^{11}}\,\mathrm{d}z$$
Idem para
$$\int_{|z|=11^{10^{10}}} \mathrm{e}^{1/(z-1)}\,z^9\,\mathrm{d}z$$

7) Escreva o desenvolvimento de Laurent de
$$f(z) = \left(\log\frac{z}{z-1}\right)^2$$

para $|z| > 1$. Em seguida calcule

$$\int_{|z|=2} \left(\log \frac{z}{z-1}\right)^2 \mathrm{d}z$$