

INTROD. VCOMPLEXAS- NOVEMBRO de 2006–lista12

Professor: Ricardo Sá Earp

FUNÇÕES MEROMORFAS E CÁLCULO DE INTEGRAIS

Cálculo de integrais via resíduos

a) Verificar

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b \sin x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad a > b > 0$$

Fazendo a substituição $t = \tan(x/2)$ encontre uma primitiva $F(x)$ para $f(x) = \frac{1}{a + b \sin x}$, $x \in \mathbb{R}$. *Resp.*

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan\left(\frac{a \tan(x/2) + b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right), \quad -\pi < x < \pi,$$

com

$$F(\pi) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad f(-\pi) = \frac{-\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad F(x + 2\pi) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

b) Calcule

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad 0 < a < 1$$

considerando a função $f(z) = e^{az} / (1 + e^z)$ e o o laço retangular formado pelos segmentos $[R, R + 2\pi i]$, $[R + 2\pi i, -R + 2\pi i]$, $[-R + 2\pi i, -R]$ e $[-R, R]$. *Sugestão:* Faça a transformação $x = e^t$ transformando a integral acima em $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$. Você saberia calcular usando um outro contorno ?

Nota: Observemos que

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

onde $\Gamma(z)$ é a função Gamma.

c) Verificar

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\alpha + \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}, \quad \alpha > 1$$

d)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{\alpha + \cos x} dx = 2\alpha\pi \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} - 1 \right), \quad \alpha > 1$$

e) Verificar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

f) Verificar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx = \frac{\pi}{a + b}, \quad a > b > 0$$

g) Verificar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a + bx^2)^n} = \begin{cases} 2\pi \left(\frac{a}{b}\right)^{1/2} (2a)^{-n} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{(n-1)!} & \text{se } n = 2, 3, \dots \\ \frac{\pi}{\sqrt{ab}} & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

com $a > 0$ e $b > 0$.

h) Verificar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin 2x}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{\pi \cos 2}{e^2}$$

i) Verificar

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{4e}$$

j) Verificar

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2 + b^2)^2} dx = \frac{\pi e^{-ab}(1 + ab)}{4b^3}, \quad a > 0, b > 0$$

k) Estabeleça que

i)

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+x^4} dx = \frac{\pi/4}{\sin((\alpha+1)\pi/4)} \quad -1 < \alpha < 3$$

Sugestão: Integre $f(z) = z^{\alpha}(1+z^4)^{-1}$ sobre $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ onde γ_1 é o segmento real $[r, R]$ ($0 < r < R$), γ_2 é o quarto de círculo (centrado em zero) de R à iR , γ_3 é o segmento $[iR, ir]$ e γ_4 é o quarto de círculo (centrado em zero) de ir à r (sendo z^{α} a determinação principal). Se $I_j = \int_{\gamma_j} f(z)dz$, mostre que $I_2 \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$ e $I_4 \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$. Além disto mostre que $I_3 = -i^{\alpha+1}I_1$. Deduza que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+x^{\beta}} dx = \frac{\pi/\beta}{\sin((\alpha+1)\pi/\beta)} \quad \beta > 0, -1 < \alpha < \beta - 1$$

fazendo a substituição $y = x^{\beta/4}$. Conclua que

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)} \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

ii) Usando um novo contorno contido num setor de ângulo $2\pi/n$ apropriado, mostre novamente que

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)} \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

iii) Fazendo uma ligeira variação do método do item b) acima, conclua que se n é um inteiro e se α é um número real tal que $n > \alpha + 1 > 0$, então

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+x^n} dx = \frac{\pi/n}{\sin \frac{(\alpha+1)\pi}{n}}$$

iv) Quando $n = 2p$ é par use obrigatoriamente um contorno retangular no semi-plano superior para calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{x^m}{1+x^{2p}} dx$$

l) Verificar por dois métodos distintos que que

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} d\theta = \begin{cases} \frac{2\pi a^n}{1 - a^2} & \text{se } |a| < 1 \\ \frac{2\pi a^{-n}}{a^2 - 1} & \text{se } |a| > 1 \end{cases}$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots, a \in \mathbb{R}$. *Sugestão* (método não clássico) : Observe que

$$1 - 2a \cos \theta + a^2 = (a - e^{i\theta})(a - e^{-i\theta})$$

e que

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\theta}}{(a - e^{i\theta})(a - e^{-i\theta})} d\theta = \int_{\gamma} \frac{z^n}{(a - z)(a - z^{-1})} \frac{dz}{iz}$$

onde $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Utilizar em seguida a fórmula de Cauchy.

m) Vamos considerar agora integrais do tipo

$$\int_0^{\infty} R(x) \ln x \, dx \quad (*)$$

onde $R(x)$ é uma função racional sem pólos sobre o semi-eixo real $\{\mathbb{R}z > 0\}$, satisfazendo $\lim_{x \rightarrow \infty} xR(x) = 0$.

i) Mostre que a condição logo acima garante a convergência da integral (*). A idéia é integrar a função $R(z) (\log z)^2$, no contorno apropriado, obtendo pelo teorema dos resíduos

$$\int_0^{\infty} R(x) (\log(x))^2 \, dx - \int_0^{\infty} R(x) (\log(x) + 2\pi i)^2 \, dx = 2\pi i \sum \text{Res} \left(R(z) (\log z)^2 \right)$$

ii) Dê uma demonstração rigorosa da equação logo acima. Mostre também que quando $R(z)$ for real, isto é, quando $z = x \in \mathbb{R} \Rightarrow R(x)$ é real, se pode calcular simultaneamente as integrais $\int_0^{\infty} R(x) \, dx$, e $\int_0^{\infty} R(x) \ln x \, dx$,

iii) Calcule

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^4} \, dx$$

iv) Mostre que

$$\int_0^{\infty} \frac{12 \ln x}{x^4 + x^2 + 1} dx = -\pi^2$$

v) Mostre que

$$\int_0^{\infty} \frac{16 \ln x}{(x+1)(x^2+1)} dx = -\pi^2$$

n) Você pode se inspirar nos exercícios acima para calcular as seguintes integrais

i)

$$\int_0^{\infty} \frac{2\sqrt{2} \ln x}{\sqrt{x}(1+x^2)} dx = -\pi^2$$

ii)

$$\int_0^{\infty} \frac{-\pi\sqrt{2}}{\sqrt{x}(1+x^2)} dx = -\pi^2$$

m) Resuma o estudo de exercícios precedentes, verificando que

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^\lambda(1+x)} dx = \frac{\pi^2 \cos \lambda\pi}{(\sin \lambda\pi)^2} \quad 0 < \lambda < 1$$

integrando $f(z) = \log z / (z^\lambda(1+z))$ ao longo do contorno apropriado, com as seguintes determinações : se $z = |z|e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$,

$$\log z = \log |z| + i\theta, \quad z^\lambda = \exp(\lambda \log z)$$

Note que esta não é a determinação principal, mas dá para $z = x > 0$ o valor $x^{a-1} = \exp((a-1) \log x)$.