

**INTROD. VCOMPLEXAS- AGOSTO DE
2006.2-LISTA2:**

GEOMETRIA DE \mathbb{C}

PROF. RICARDO SÁ EARP

- (1) Sejam $a, b \in \mathbb{C}, a \neq b$. Para cada $k > 0$ considere a família $\mathcal{A}_k := \{z; \left| \frac{z-a}{z-b} \right| = k\}$. Considere também a família Λ de círculos ou retas que passam pelos pontos a, b . Verifique que \mathcal{A}_k é uma curva clássica, estudando-a geometricamente. Estude geometricamente as duas famílias, deduzindo que formam um sistema ortogonal de coordenadas.
- (2) Seja $T(z) = \frac{az-b}{cz-d}, ad-bc \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{C}$, uma transformação de Möbius. Dados quatro pontos distintos, z_0, z_1, z_2, z_3 , de \mathbb{C} , defina a *bi-razão*, pela fórmula $[z_0, z_1, z_2, z_3] := \frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}$. Deduza que $T(z)$ preserva a bi-razão de 4 pontos distintos de \mathbb{C} , ou seja $[T(z_0), T(z_1), T(z_2), T(z_3))] = [z_0, z_1, z_2, z_3]$. Deduza que os 4 pontos distintos z_0, z_1, z_2, z_3 , estão sobre uma mesma reta ou sobre um mesmo círculo, se e só se a bi-razão $[z_0, z_1, z_2, z_3]$ é real.
- (3) Usando um exercício da lista 1 e decomposição em frações parciais, deduza que a aplicação $z \mapsto \frac{1}{z}$ leva círculos ou retas em círculos ou retas. Conclua que toda transformação de Möbius possui a mesma propriedade.
- (4) Seja $C = C_R(a)$ o círculo de centro $a \in \mathbb{C}$ e raio $R > 0$. A *inversão* ou *simetria* I_C com respeito a C está definida por $z^* = I_C(z) := a + \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}}$.
- (a) Deduza que $I_C \circ I_C = \text{id}_{\mathbb{C}}$.
 - (b) I_C fixa os pontos de C .
 - (c) I_C leva círculos ou retas em círculos ou retas.
 - (d) I_C preserva os ângulos mas inverte as orientações.
 - (e) I_C deixa globalmente invariante um círculo C_1 ortogonal à C , isto é, $I_C(C_1) = C_1$.

- (5) Considere a transformação de Möbius $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$. Deduza que $T(z)$ é um *mapeamento conforme* do semi-plano superior $\text{Im}z > 0$, no disco unitário $|z| < 1$. Explícite dois círculos ou (semi-) retas do semi-plano superior e suas imagens no disco, usando o exercício (3) e discutindo neste exemplo a questão da conformidade.