

# INTROD. VCOMPLEXAS- AGOSTO DE 2006–Lista3

Professor: Ricardo Sá Earp

## PARTE A: DIFERENCIABILIDADE

- 1) Mostre a seguinte regra da cadeia: Seja  $A$  um conjunto aberto de  $\mathbb{C}$  e seja  $f \in C^1(A)$ . Se  $B$  é um aberto de  $\mathbb{C}$  tal que  $f(A) \subset B$  e  $g \in C^1(B)$ , então  $g \circ f \in C^1(A)$  e

a)

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z} = \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial z} \right) \circ f \right] \frac{\partial f}{\partial z} + \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right) \circ f \right] \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \bar{z}} = \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial z} \right) \circ f \right] \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right) \circ f \right] \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$$

- i) Mostre que

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \overline{\left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} \right)}$$

- ii) Seja  $g(z)$  é uma função anti-holomorfa definida num aberto  $A$  do plano complexo  $\mathbb{C}$ . Estabeleça a equação diferencial complexa de primeira ordem que  $g(z)$  satisfaz. Mostre que se  $g(z)$  toma apenas valores imaginários puros então  $g(z)$  é constante.

- iii) Calcule

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial z} (3\bar{z}^3 - z^2 + 1) & \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (z^8 + 2z^3\bar{z}^6) \\ \frac{\partial^5}{\partial z^3 \partial \bar{z}^2} (\bar{z}^{11} z^7 + z^8 + 2\bar{z}^3) & \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2} (\bar{z}^{11} z^7 + z^8 + 2\bar{z}^3) \\ \frac{\partial^5}{\partial z^3 \partial \bar{z}^2} (x^{11} y^7 + x^8 + 2y^3) & \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2} (2\bar{z}^6 z^6 + z^5 + 2\bar{z}^7) \end{array}$$

- b) Mostre que  $\frac{\partial(\log |z|)}{\partial z} = \frac{1}{2z}$  e  $\frac{\partial(\log |z|)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2\bar{z}}$

c) Se  $\Delta$  é o laplaciano usual então

$$\Delta = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

d) Se  $\lambda(z) = \frac{2}{1 - |z|^2}$ ,  $|z| < 1$ , então  $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$  é a métrica hiperbólica no disco unitário aberto  $\mathcal{D} = \{|z| < 1\}$ . Mostre que a *curvatura de Gauss*  $K$  dada por  $K(z) = \frac{-\Delta \log \lambda}{\lambda^2}$  é identicamente igual a  $-1$ .

e) Mostre rigorosamente que as funções  $f(z)$  e  $\overline{f(\bar{z})}$  são simultâneamente holomorfas.

f) Seja  $f$  uma função holomorfa num aberto  $U \subset \mathbb{C}$ . Suponha que  $f$  não se anule. Mostre que

$$\Delta (|f|^p) = p^2 |f|^{p-2} \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2, \quad \text{para } p > 0$$

g) Mostre que se  $f$  é harmônica tomando valores reais no aberto  $U$ , e se  $f$  não se anula, então

$$\Delta (|f|^p) = p(p-1) |f|^{p-2} |\nabla f|^2, \quad \text{para } p \geq 1$$

h) Mostre que o laplaciano em coordenadas polares é escrito da forma

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

i) Seja  $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  um polinômio. Suponha que

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} P = 0$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Mostre que

$$P(z, \bar{z}) = z \cdot G(\bar{z}) + H(\bar{z})$$

para polinômios  $G$  e  $H$  que dependem apenas de  $\bar{z}$ .

2) Seja  $f$  uma função holomorfa definida num domínio  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$ .

a) Demonstre que  $f$  é constante se uma das condições seguintes são verificadas:

- (i)  $\Re f$  é constante      (ii)  $\Im f$  é constante      (iii)  $a\Re f + b\Im f + c = 0$ ,  
onde  $a, b, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0$ .      (iv)  $|f|$  é constante.

b) Mostre as mesmas afirmações do item a) assumindo que  $f(z)$  é anti-holomorfa.

c) Mostre que  $\forall z \in \Omega$

$$\Delta(|f(z)|^2) = 4|f'(z)|^2$$

admitindo o fato de que  $f = u + iv, u, v \in C^2(\Omega)$ .

(i) Seja  $f(z) = u(z) + iv(z), \Re f = u, \Im f = v$  uma função holomorfa num domínio  $\Omega$  satisfazendo

$$2u^2(z) + v^2(z) = 1, \quad \forall z \in \Omega$$

Determine *todas* tais  $f(z)$ .

(ii) Generalize quando  $u(z)$  e  $v(z)$  satisfazem a equação geral do segundo grau

$$au^2 + 2buv + cv^2 + du + ev + k = 0 \quad (a, b, c, d, k \in \mathbb{R})$$

3) Seja  $\Omega$  um domínio do plano complexo. Sejam  $f$  e  $g$  funções holomorfas em  $\Omega$ . Assuma que  $g$  nunca se anule em  $\Omega$  e que  $\frac{f(z)}{g(z)} \in \mathbb{R}$ , para todo  $z \in \Omega$ .

O que você pode dizer da relação entre  $f$  e  $g$  ?

(4) Seja  $C$  uma curva contida no  $w$ -plano complexo  $\mathbb{C}$  determinada implicitamente pela equação

$$\varphi(u, v) = 0$$

a) Suponha que  $f(z) = u(z) + iv(z)$  seja uma função holomorfa definida num aberto  $A$  de  $\mathbb{C}$  satisfazendo  $\varphi(u(z), v(z)) = 0, \forall z \in A$ . O que você pode dizer sobre  $f$ ?

b) Idem item a) assumindo que  $f(z)$  é anti-holomorfa.

(5) Considere a equação diferencial complexa de segunda ordem dada por

$$(*) \quad E_{z\bar{z}} = \frac{\bar{E}}{1 + E\bar{E}} E_z E_{\bar{z}}$$

Encontre duas famílias de soluções da equação (\*).

- (6) Sejam  $f, g$  duas funções holomorfas definidas num aberto  $A$  de  $\mathbb{C}$  não se anulando simultaneamente. Seja

$$H(z) := \log \left( \frac{1}{|f(z)|^2 + |g(z)|^2} \right)$$

Mostre que  $H(z)$  é superharmônica em  $A$ .