INTROD. VCOMPLEXAS- AGOSTO DE 2006–Lista4

Professor: Ricardo Sá Earp

PARTE A: SÉRIES DE NÚMEROS COMPLEXOS

1) Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz mostre que se $\sum_n |a_n| < \infty$ as seguintes séries são convergentes

$$\sum_n |a_n a_{n+1}|^{1/2}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{|a_n|^{1/2}}{n}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{|a_n|^{1/2}}{n^{1/2+p}}, \qquad p > 0.$$

2) Considerando a função cosseno dada por $\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ e a função seno dada por $\mathrm{sen}\, \mathrm{z} := \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} (-1)^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{z}^{2\mathrm{n}+1}}{(2\mathrm{n}+1)!}$, usando o resultado sobre produto de séries absolutamente convergentes, mostre (efetuando o produto de séries) que

a) $2\mathrm{sen}\, \mathrm{z} \cos \mathrm{z} = \mathrm{sen}\, 2\mathrm{z}$.

b) $\cos^2 z + \mathrm{sen}\,^2 \mathrm{z} = 1$.

3) Mostre que a série abaixo converge absolutamente para $p > 1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^p}$$

a) Mostre que a série $\sum c_n$ diverge para $0 < p \leqslant 1/2$, onde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)\,(n-k+1)\right)^{-p}$$

i) Mostre que a série $\sum c_n$ converge absolutamente para $p > 1$.

4) Determine o raio de convergência das séries de potências, determinando o disco de convergência.

a) $\sum_n n^{\alpha} z^n,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

b) $\sum_n n!(z/n)^n$.

c) $\sum_n \alpha^{n^2} z^n,\ \alpha \in \mathbb{C}$.

d) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n!}\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)z^n,\ \alpha \in \mathbb{C}; \sum_n \frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)z^n,\ \alpha \in \mathbb{C}$.

Sugestão: Considere o caso $\alpha \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots,\}$ *separadamente.*

e) $\sum_n (\log n)^2 z^n$. *Resposta*: 1.

f) $\sum_n n!/(n^n)z^n$.

Sugestão: Considere a fórmula de Stirling $n! = n^n \mathrm{e}^{-n} u_n$ com $\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} = 1$.
Resposta: e

g) $\sum_n z^{2^n}/(n!)$.

h)

$$\sum_{n\geqslant 0} 3^n z^{n^2}$$

5)

a) Sejam a, b, c números complexos. Suponha que c não é um inteiro $\leqslant 0$. Mostre que o raio de convergência da série abaixo é 1.

$$1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)\cdot b(b+1)}{2!c(c+1)}z^2 + \cdots + \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)\cdot b(b+1)\ldots(b+n-1)}{n!c(c+1)\ldots(c+n-1)}z^n + \cdots$$

6) Mostre que as séries de números complexas abaixo, convergem nos conjuntos $\mathcal{C}$ dados

a) $\sum\limits_n (z/(1+z))^n$. $\mathcal{C} = \{z; \Re z > -1/2\}$. *Sugestão*: Você terá que mostrar que $z \mapsto \dfrac{z}{1+z}$ leva o semi-plano $\{z; \Re z > -1/2\}$ no disco unitário centrado na origem.

b) $\sum\limits_n z^n/(1+z^n)$. $\mathcal{C} = \{z; |z| < 1\}$.

c) $\displaystyle\sum \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n$. $\mathcal{C} = \{z, \quad \Re z > 0\}$. *Sugestão*: Veja sugestão para o item a).

7) Seja R o raio de convergência da série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. Mostre que o raio de

convergência $\widetilde{R}$ da série

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{1+|a_n|} z^n$$

é dado por $\widetilde{R} = \max(R, 1)$

8) Determine os raios de convergência das séries.
   a) $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n 2^n z^{2n+2}$.
   b) $\sum_{n\geqslant 0} 2^{\log n} z^n$.
   c) $\sum_{n\geqslant 0}(\sin n) z^n$.

* * *

Os exercícios abaixo são mais difíceis e não devem ser feitos numa primeira leitura, mas devem ser feitos numa segunda leitura.

9) Neste exercício você precisará fazer uso de certas *desigualdades clássicas*. Sejam $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$ duas seqüência de números reais positivos satisfazendo certas condições. Considere a série de potências

$$f(z) = \sum a_n z^n$$

Discuta o raio de convergência da série sabendo que a_n, α_n, β_n satisfazem às seguintes condições abaixo.
   a) $a_n := (\alpha_n + \beta_n)^{\alpha_n + \beta_n}$, onde

$$\alpha_n^{\alpha_n} \beta_n^{\beta_n} = O(2^n) \qquad (n \to \infty)$$

Mostre primeiramente que (por exemplo com a ajuda da desigualdade de Young)

$$a^a\, b^b \geqslant \frac{(a+b)^{a+b}}{2}, \quad a \geqslant b > 0, a+b=1$$

   b) $a_{n+1} := \alpha_{n+1}\beta_{n+1}^n$, onde

$$\frac{\alpha_{n+1} + n\beta_{n+1}}{n+1} = O(1) \qquad (n \to \infty)$$

Aqui você precisa comparar as quantidades $\dfrac{\alpha_{n+1} + n\beta_{n+1}}{n+1}$ e $\alpha_{n+1}\beta_{n+1}^n$ via a desigualdade da média,

10) Considere n um inteiro positivo. Defina $N(n)$ o número de algarismos de n. Defina também $S(n)$ a soma dos algarismos de n. Escreva uma relação de desigualdade entre $\log_{10} n$(logaritmo na base 10) e $S(n)$. Levando em conta isso, determine o raio de convergência da série

$$\sum_1^\infty S(n) z^n$$

11) Seja $\{a_n, \quad n = 2, 3, \ldots\}$ uma seqüência de números complexos não nulos satisfazendo

$$(*) \qquad \sum_2^\infty n|a_n| < 1$$

a) Discuta sobre o disco de convergência da série

$$(**) \qquad z + \sum_2^\infty \left((n-1)\right)^n (\ln 2) a_2 (\ln 3) a_3 \cdots (\ln n) a_n z^n$$

Você precisa usar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, levando em conta $(**)$.

b) Agora suponha $\operatorname{Re} a_n > 0, \quad n = 2, 3, \ldots.$

i) Discuta, *com todos os detalhes*, o raio de convergência da série

$$\sum_2^\infty \frac{a_n^{2^n}}{1 + n\, a_n} z^{n\, 2^n}$$

Aqui você terá que observar que a série apresenta "gaps" e tome cuidado com potenciação para aplicar o critério de Cauchy (raiz).

ii) Dê exemplos de tais a_n satisfazendo $(*)$ e assim exemplos de séries satisfazendo o item i).

12) Seja $\{a_n\}$ uma seqüência dada por $a_n = 1$, se $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$ e $a_n = 0, n \neq 2^k$. Seja $m > 0$. Discuta com detalhes o raio de convergência da série

$$\sum_{n=0}^\infty a_n\, \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}\, \mathrm{e}^{mn}\, z^n$$

Novamente você terá que observar que a série apresenta "gaps" e tome cuidado com potenciação para aplicar o critério de Cauchy (raiz).

13) Seja $a = \alpha + i\tau, \alpha, \tau \in \mathbb{R}, \tau > 0$. Considere a série

$$f(z) = \sum_n \log n \, a^n z^{n^2}$$

Determine o raio de convergência e o disco de convergência.

14) Classicamente, o domínio limitado pelas chamadas *curvas de Cassini*, dadas por

$$|z-a|\,|z+a| = R^2, \qquad a, R > 0$$

são chamados de domínios de Cassini. Para $a = R$, a origem é um ponto duplo, para $a > R$ tem duas componentes conexas e para $a < R$ é um domínio estrelado cujo centro é a origem.

Mostre que a série $\displaystyle\sum_n \left(\frac{1}{2} z(z-1)\right)^{2^n}$, converge em certo domínio de Cassini.