

INTROD. VCOMPLEXAS- AGOSTO DE 2006–Lista5

Professor: Ricardo Sá Earp

SÉRIES DE TAYLOR

Seja $f(z) = 1/z(z-1)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Obtenha o desenvolvimento de $f(z)$ em $z = 2$, usando a seguinte técnica

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{z-2}{2}\right)^{-1} + (1 + (z-2)) \\ &= -\frac{1}{2} \left\{1 - \frac{z-2}{2} + \left(\frac{z-2}{2}\right)^2 - \dots\right\} + \{1 - (z-2) + (z-2)^2 - \dots\} \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} - 1\right)(z-2) + \dots + \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{2^n} + (-1)^n\right)(z-2)^n + \dots \\ &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) (z-2)^n \end{aligned}$$

Qual é o raio de convergência da série acima ? Discuta isto!

1) Considere

$$f(z) = z^2/(z-2), \quad z \neq 2$$

a) Mostre que $f(z)$ é holomorfa. Encontre os termos de ordem ≤ 3 do desenvolvimento em série de potências da função $f(z)$ em $z = 1$.

Resposta : $-1 - (1+2)(z-1) - (1+2+1)(z-1)^2 - (1+2+1)(z-1)^3$.

b) Agora, aplicando a técnica acima desenvolvida em sala de aula, obtenha a série de Taylor de $f(z)$ em $z = 1$. Daí calcule $f^{(n)}(1)$, $n \geq 0$

2) Considere a função

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 - 3z + 2}, \quad z \neq 1, 2$$

a) Obtenha o desenvolvimento de Taylor de $f(z)$ em $z = 0$, determinando o termo geral da série. Calcule o raio de convergência da série de Taylor.

- b) Obtenha o desenvolvimento de Taylor de $f(z)$ em $z = 3/2$, determinando o termo geral da série. Calcule o raio de convergência da série de Taylor.
- 3) Idem item 2) com respeito a função $f(z) = z/((z + 1)^2(z - 3))$.
- 4) Idem item 2) com respeito a função $f(z) = z/(z^2 + 1)(z - 1)^2$.
- 5) Seja $f(z) := \frac{e^z}{(1 - z)}$, para $|z| < 1$. Mostre que $f(z)$ é analítica. Seja $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ o desenvolvimento de Taylor da função dada na origem. Use a fórmula de multiplicação de séries para calcular a_n (e deduzindo analiticidade) mostrando que

$$a_n = \left(1 + \cdots + \frac{1}{n!}\right), \quad n \geq 1, \quad a_0 = 1$$

- 6) Mostre que $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} + \frac{i/2}{(z - i)}$ ($z \neq i$) e $f(i) = 1/4$, é holomorfa para $|z - i| < 2$, deduzindo que

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{4} \left(\frac{i}{2}\right)^n (z - i)^n, \quad |z - i| < 2$$

- 7) Considere a função

$$(*) \quad f(z) = \frac{1}{1 + z + z^2}$$

Seja $\sum a_n z^n$ o desenvolvimento de Taylor de $f(z)$ na origem.

- a) Mostre que os coeficientes a_n satisfazem uma relação de recorrência que dá a seguinte equação de diferenças linear de primeira ordem:

$$a_{n+1} + a_n + a_{n-1} = 0, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = -1$$

- b) Calcule a_n , mostrando que

$$a_n = \frac{i}{\sqrt{3}} e^{\pi i(2n-1)/3} - \frac{i}{\sqrt{3}} e^{-\pi i(2n-1)/3}$$

- c) Calcule $f^{(n)}(0)$, a derivada de ordem n de $f(z)$ na origem.
- d) Determine o desenvolvimento de Taylor de f na origem, verificando que a função racional (*) acima dá a *forma fechada* de tal desenvolvimento, verificando o seu resultado.

- e) Calcule o raio de convergência da série de Taylor.
 f) Mostre que $f(z)$ satisfaz uma equação diferencial de segunda ordem (envolvendo $f(z), f'(z), f''(z)$) não linear.

8) Considere

$$J(z) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

Mostre que $J(z)$ satisfaz a equação diferencial (Veja num livro outros exemplos de equações lineares complexas, regulares e singulares-regulares, de segunda ordem)

$$z^2 J''(z) + z J'(z) + z^2 J(z) = 0$$

- 9) Sejam a, b, k constantes reais, com $k \neq 0$. Define-se uma seqüência $\{a_n\}$ pela relação de recorrência (equação de diferenças linear de segunda ordem):

$$a_0 = a, \quad a_1 = b, \quad ka_{n+2} - (1 + k^2)a_{n+1} + ka_n = 0$$

Considere a série

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$$

- a) Mostre que $f(z)$ satisfaz a uma equação diferencial linear de segunda ordem. Encontre uma *expressão explícita para $f(z)$* e em seguida encontre uma expressão para os a_n . Analise os casos $k = \pm 1$, separadamente.
- 10) Considere $\{a_n\}$ uma seqüência satisfazendo a equação de diferenças de segunda ordem

$$a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2}, \quad n \geq 1$$

com condições iniciais $a_1 = 0, a_2 = 1$.

Considere a série de potências

$$f(z) = \sum_1^{\infty} a_n z^n$$

- a) Mostre que a série define uma função holomorfa $f(z)$ numa vizinhança da origem.

- b) Determine $f(z)$ numa “closed form”, i.e na forma de uma fração racional, obtendo $f(z) = \frac{2z^2}{2 - z - z^2}$.
- c) Calcule $f^{(n)}(0)$, $n \geq 0$, e calcule o raio de convergência da série, mostrando que $a_n = \frac{2}{3} + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{2}{3}$

11) Considere a equação de diferenças

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

satisfazendo as condições iniciais $a_0 = a_1 = 1$. Esta é uma equação linear de diferenças de segunda ordem com coeficientes constantes. Você deveria saber resolver isto com os métodos do Cálculo IV! Vamos propor outra solução via a teoria das funções analíticas. À propósito: Tal seqüência é chamada de *seqüência de Fibonacci*.

- a) Mostre que $A(z) := \sum a_n z^n$ tem raio de convergência $R > 0$.
- b) Mostre que $A(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$, concluindo que $A(z)$ tem raio de convergência $R = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.
- c) Mostre que

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

O número $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618\dots$ é o número áureo dos gregos da antiguidade.

12) Verifique (ou obtenha) os desenvolvimentos de Taylor das funções abaixo, justificando a convergência (raio e disco de convergência) em cada caso.

- a) $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n, \quad |z| < 1.$
- b) $\frac{1}{(1-z)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) \cdots (n+m)}{m!} z^n, \quad |z| < 1, m \in \mathbb{N}.$
- c) $\sin(\alpha z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad z \in \mathbb{C}.$
- d) $\cos z^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$

$$e) \frac{1}{z^2 + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n+1) \frac{\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{n+1}} (z-1)^n, \quad |z-1| < \sqrt{2}.$$

$$f) \frac{1}{1 - 2z \cos \theta + z^2} = \sum_0^{\infty} \frac{e^{(n+1)i\theta} - e^{-(n+1)i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} z^n, \quad |z| < 1$$

g) Exiba as séries abaixo escrevendo uma expressão numa “forma fechada” ($s \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{n \geq 0} z^n \cos ns$$

$$\sum_{n \geq 0} z^n \sin ns$$

13) Considere a função $f(z) = \frac{e^{-z}}{1+z}$.

- Encontre o desenvolvimento de Taylor de f na origem, determinando os coeficientes da série.
- Calcule o raio de convergência por dois métodos distintos.
- Calcule $f^{(n)}(0)$.

14) Assuma que $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$. Considere a série $f(z) := z + \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|$.

- Deduza que $f(z)$ holomorfa no disco unitário de raio 1.
- Calcule $f(0)$, $f'(0)$ e dê uma fórmula para $f^{(n)}(0)$.
- Deduza que $f(z)$ é univalente em $|z| < 1$.