# INTROD. VCOMPLEXAS- AGOSTO DE 2006–Lista6

*Professor: Ricardo Sá Earp*

## ZEROS DE FUNÇÕES ANALÍTICAS E CONTINUAÇÃO ANALÍTICA

1)

Responda verdadeiro ou falso. Caso verdadeiro esboce uma dedução sucinta. Caso falso esboce um contra-exemplo.

a) Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função analítica definida num domínio $\Omega$. Seja $c_n, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$, uma seqüência de pontos de $\Omega$ com $c_n \to c \quad (n \to \infty)$. Assuma que $f(c_n) = 0$. Segue então que $f \equiv 0$ em $\Omega$.

b) Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função anti-analítica definida num domínio $\Omega$. Seja $c_n, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$, uma seqüência de pontos de $\Omega$ que possui um ponto de acumulação pertencendo ao domínio $\Omega$. Assuma que $f(c_n) = 0$. Segue então que $f \equiv 0$ em $\Omega$.

2) Verificar as afirmações abaixo com respeito a existência de uma função analítica $f$ definida numa vizinhança (aberta) de $z = 0$.

a) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \cos n\pi,\ n = 1, 2, \ldots$, é impossível.

b) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right),\ n = 1, 2, \ldots$, é impossível.

c) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n+1},\ n = 1, 2, \ldots$, implica que $f(z) = z/(z+1)$.

d) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n^2\sin(\pi/n)}{n+1},\ n = 1, 2, \ldots$, implica que $f(z) = \sin(\pi z)/z(z+1)$, com $f(0) = \pi$.

e) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f\left(\dfrac{1}{2n}\right),\ n = 1, 2, \ldots$, implica que $f$ é constante.

f)

$$an^{-5/2} \leqslant \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leqslant bn^{-5/2}$$

onde $a, b$ são constantes $> 0$, é impossível.

g) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2n+1},\ n = 1, 2, \ldots$, implica que $f(z) = z/(z+2)$.

h) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n + \cos(n\pi)}$ é impossível.

3) Seja $\Omega$ um domínio e sejam $f$ e $g$ duas funções analíticas definidas em $\Omega$.

a)

i) Assuma que $f(z)g(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. O que você pode dizer de $f$ e de $g$ ?

ii) Assuma que $f(z)\overline{g(z)} = 0$ para todo $z \in \Omega$. O quê você pode dizer de $f$ e de $g$ ?

4) Seja $u = u(x+iy)$ uma função harmônica definida num domínio $\Omega$. Assumindo que localmente uma função harmônica é parte real de uma função analítica, o que você pode dizer do conjunto $\mathcal{C} = \{u_x = u_y = 0\}$ ?

5) Verifique se existem funções analíticas definidas num domínio contendo a origem que satisfaçam a condição abaixo.

a) $f(\frac{1}{n^2}) = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$, onde $n \in \mathbb{N}^*$.

* * *

***Os exercícios abaixo são mais difíceis e não devem ser feitos numa primeira leitura.***

6) Considere a equação diferencial complexa de segunda ordem dada por (veja listaB (5)):

$$(*) \qquad E_{z\overline{z}} = \frac{\overline{E}}{1 + E\overline{E}}\, E_z E_{\overline{z}}$$

Dizemos que uma função $E : U \to \mathbb{C}$ de classe $C^2$ definida num domínio $U \subset \mathbb{C}$ é uma *solução trivial* da equação $(*)$, se $E$ é analítica ou anti-analítica. Sejam $f(z)$ e $g(z)$ funções analíticas em $U$.

a) Assuma que $E(z) = f(z)\overline{g(z)}$ seja uma solução de $(*)$. Mostre que $E$ é uma solução trivial de $(*)$.

b) Assuma que $E(z) = f(z) + \overline{g(z)}$ seja uma solução de $(*)$. Mostre que $E$ é uma solução trivial de $(*)$.

7) Seja $f(z)$ uma função analítica definida numa vizinhança da origem. Mostre que se $f(z)$ satisfaz

$$f(2z) = 2f'(z) \cdot f(z)$$

então $f(z)$ é uma função inteira, i.e definida em todo plano complexo $\mathbb{C}$. Dê exemplos de funções elementares que satisfazem a igualdade acima.

No próximo exercício você vai ter que assumir o fato de que uma ***aplicação analítica é aberta***.

8) Considere $\varphi(z) = u(z) + iv(z)$ uma função complexa de classe $C^1$ definida em um domínio $\Omega$.

   a) Suponha agora que $\varphi$ seja analítica em $\Omega$. Suponha ainda que existe uma vizinhança aberta $V \subset \Omega$, tal que $\overline{\varphi(z)} \in \Omega$, $\forall z \in V$. Mostre que $w = \overline{\varphi\left(\bar{\varphi}(z)\right)}$ é uma função analítica num aberto de $\Omega$. (*Sugestão*: use o fato que uma aplicação analítica é aberta e a observação anterior). Considere o conjunto $\mathcal{A} = \{z \in V,\ \bar{z} = \varphi(z)\}$. Suponha finalmente que $a \in \mathcal{A}$ seja um ponto de acumulação de $\mathcal{A}$. Mostre que $z \equiv \overline{\varphi\left(\overline{\varphi}(z)\right)}$ em $V$. Conclua que $|\varphi^{'}(a)| = 1$.

9) Seja $f(z)$ uma função analítica no disco unitário aberto centrado na origem. Suponha que para $-1 < x < 1$ $(x \in \mathbb{R})$, $u = f(x)$ satisfaça a equação diferencial

$$u'(x) = \frac{2u(x)}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2}$$

Assuma que $f(0) = 1$. Encontre $f(z)$. Calcule $f^{(n)}(0)$.